

De rekenontwikkeling en onderwijsbehoeften van leerlingen

in perspectief van het voeren van rekengesprekken door leraren

Jarise Kaskens onderzocht in haar promotieonderzoek de invloed van leerling- en leraarfactoren op de rekenontwikkeling van leerlingen. De resultaten laten zien dat een stevige rekenbasis belangrijk is. Als de basis niet goed is, kunnen leerlingen daar hinder van ondervinden als het rekenen wat complexer wordt.

Ook executieve functies, de reguleringsfuncties die denkprocessen in het brein aansturen, zijn van invloed. Naast cognitieve factoren is de relatie tussen rekenbeleving van leerlingen en de reken-wiskundige ontwikkeling onderzocht. De bevindingen laten de relatie zien tussen zelfbeeld ten aanzien van rekenen en het niveau van geautomatiseerde basiskennis. Voor wat betreft de leraren blijkt het belangrijk te zijn dat zij over vakspecifieke kennis beschikken om goed reken-wiskunde-onderwijs te realiseren, met name als het gaat om de ontwikkeling van probleemoplossingsvaardigheden. Steeds meer onderwijsprofessionals zijn ervan overtuigd dat voor het in kaart brengen van de onderwijsbehoeften van leerlingen formatieve beoordelingsvormen nodig zijn, die procesgericht zijn en informatie kunnen bieden over hoe de leerlingen verder in hun ontwikkeling kunnen worden gestimuleerd. De interventie die in dit onderzoek is ingezet is het voeren van rekengesprekken om na te gaan wat leerlingen nodig hebben om beter te leren rekenen. De informatie die leraren krijgen tijdens deze rekengesprekken helpt leraren om de rekenles beter af te stemmen op wat de verschillende leerlingen nodig hebben. De opbrengsten van dit onderzoek kunnen worden benut in opleidingen en in de onderwijspraktijk.

Inleiding

De verschillen tussen de reken-wiskundige ontwikkeling van leerlingen zijn groot. Daarbij gaat het om het niveau van beheersing van basisvaardigheden en op probleemoplossingsvaardigheden van leerlingen, bijvoorbeeld het oplossen van Cito-rekenopgaven¹.

Jarise Kaskens
Hogeschool Windesheim

Kaskens, J. (2022). De rekenontwikkeling en onderwijsbehoeften van leerlingen in perspectief van het voeren van rekengesprekken door leraren. *Volgens Bartjens – ontwikkeling en onderzoek*, 42(2), 41-53.

Leren rekenen is belangrijk voor het goed kunnen functioneren in de maatschappij (Tout & Gal, 2015). In de eerste jaren op de basisschool wordt een belangrijke basis gelegd: kinderen ontwikkelen getalbegrip, leren belangrijke rekenbegrippen en ontwikkelen stapsgewijs reken-wiskundige concepten en procedures (Geary, 2004; Geary & Hoard, 2005). Geleidelijk groeit de beheersing van basisvaardigheden: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Vanaf ongeveer groep 6 neemt de complexiteit van het rekenen op school toe (Geary, 2011). Leerlingen krijgen dan complexere (context)opgaven voorgelegd, waarin diverse berekeningen moeten worden toegepast. Daarnaast krijgen ze nieuwe rekenonderdelen aangeboden, zoals breuken en procenten. De verschillen in de reken-wiskundige ontwikkeling tussen leerlingen kunnen worden voorspeld vanuit cognitieve factoren (bijvoorbeeld redeneren, geheugen), domeinspecifieke inzichten (zoals begrijpen wat een breuk is), en kennis en vaardigheden (zoals vlot kunnen optellen en aftrekken tot 20) (Bailey et al., 2014; Cragg et al., 2017; Fuchs et al., 2016). Ook overtuigingen en emoties van leerlingen ten aanzien van rekenen kunnen van invloed zijn op hun reken-wiskundige ontwikkeling (Chinn, 2012; Lebens et al., 2011; Lee, 2009).

Elke schooldag weer staan leraren voor de uitdaging om het reken-wiskunde-onderwijs af te stemmen op de verschillen tussen leerlingen (Charalambous, 2015). Om dat te realiseren is het nodig dat leraren inzicht hebben in de onderwijsbehoeften van leerlingen bij het leren rekenen (Deunk et al., 2018; Hoth et al., 2016). Daartoe zijn formatieve procesgerichte beoordelingsvormen nodig die informatie kunnen bieden over hoe de leerlingen verder in hun ontwikkeling kunnen worden gestimuleerd (Ginsburg, 2009; Veldhuis et al., 2013). Het voeren van rekengesprekken, een semi-gestructureerd, dynamisch interview met een proces-georiënteerd karakter, kan daarin voorzien (Allsopp et al., 2008; Ginsburg, 2009; Van Luit, 2019).

Cognitieve aspecten en de reken-wiskundige ontwikkeling van leerlingen

Binnen het rekenen worden diverse domeinen onderscheiden die zowel conceptueel begrip, procedurele kennis als feitenkennis vereisen. Twee relevante aspecten van de rekenontwikkeling zijn geautomatiseerde basiskennis en reken-wiskundige probleemoplossingsvaardigheden (Fuchs et al., 2008). Leerlingen die vlot en accuraat kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen hebben daar profijt van voor de verdere reken-wiskundige ontwikkeling (Cirino et al., 2016; Fuchs et al., 2006). De verwachting is dat leerlingen in groep 6 over voldoende geautomatiseerde basiskennis beschikken. Recent onderzoek laat zien dat dit niet het geval is (Van Hoogmoed et al., 2021).

Het oplossen van reken-wiskundige problemen vereist conceptueel begrip, vlot berekeningen kunnen uitvoeren, en specifieke kennis en vaardigheden. Denk bijvoorbeeld aan het snel kunnen oproepen van opgeslagen kennis uit het geheugen, de juiste informatie uit een opgave kunnen halen die nodig is om tot een oplossing te komen, en het flexibel kunnen toepassen van diverse strategieën. Het vraagt van leerlingen om goed te lezen, (ir)relevante informatie te onderscheiden, kernbegrippen te identificeren, een plan te bedenken, onderliggende getalsmatige relaties te bepalen, de vereiste bewerkingen en algoritmen te selecteren en toe te passen, en getallen te manipuleren (Boonen et al., 2013; Kintsch & Greeno, 1985). Het oplossen van reken-wiskundige problemen doet een beroep op verschillende cognitieve capaciteiten, waaronder reguleringsfuncties die denkprocessen in het brein aansturen: visuospatieel en verbaal updaten, inhibitie, en shifting (Baddeley, 2000; Bull & Sherif, 2001; Lester, 2013; Miyake et al., 2000). Bij updating gaat het om het opslaan, bewerken en verwerken van opgeslagen informatie in het werkgeheugen als er nieuwe informatie binnenkomt. Bij visuospatieële updating gaat het om visueel-ruimtelijk aangeboden informatie, ofwel het zien en verwerken van waarnemingen in de ruimte, bijvoorbeeld het onthouden van de locatie van een blokje. Bij verbale updating gaat om opslaan, bewerken en verwerken van gesproken of geschreven talig aangeboden informatie, zoals het onthouden van tussenantwoorden tijdens het oplossen van een rekenopgave. Bij inhibitie gaat het om het kunnen onderdrukken van niet adequate respons, bijvoorbeeld bij een opgave als $4 + 5$ niet doortellen en dus de automatische respons om de telrij op te zeggen onderdrukken. Shifting is het vermogen om flexibel te kunnen wisselen tussen bewerkingen en/of strategieën als dit bij rekentaken nodig is. Dit is van belang bij rekenopgaven waarin diverse bewerkingen moeten worden uitgevoerd. Bijvoorbeeld een opgave als 102-98, waarbij dan niet een uitgebreide aftrekhandeling wordt uitgevoerd, maar bedenken dat bij 98 vier opgeteld kan worden om 102 te krijgen. Het oplossen van reken-wiskundige problemen vraagt zowel om analytisch denken als om reken-wiskundig redeneren, vaardigheden die relevant zijn om te leren voor leerlingen omdat ze die in hun schoolcarrière en latere leven nodig hebben

(Gravemeijer et al., 2017). Veel onderzoek is al gedaan naar de invloed van leerling- en leraarfactoren op de rekenontwikkeling, maar weinig onderzoek combineert deze factoren (Kaskens et al., 2020).

Geautomatiseerde basiskennis en reken-wiskundige probleemoplossingsvaardigheden kunnen worden onderscheiden van elkaar, maar hangen ook met elkaar samen (Fuchs et al., 2008). Zo kunnen leerlingen tijdens het oplossen van een rekenprobleem er hinder van ondervinden als ze niet over voldoende geautomatiseerde basiskennis beschikken, niet de benodigde feiten kunnen ophalen uit het lange termijn geheugen en vastlopen of fouten maken (Andersson, 2008; Geary, 2011; Träff et al., 2020). Geautomatiseerde kennis faciliteert het werkgeheugen en bevordert de ontwikkeling van probleemoplossingsvaardigheden en van het verwerven van nieuwe reken-wiskundige concepten en vaardigheden (Geary, 2004).

Overtuigingen en emoties en de reken-wiskundige ontwikkeling

Als het gaat om overtuigingen en emoties, zijn in dit onderzoek drie aspecten betrokken die een rol lijken te spelen in de reken-wiskundige ontwikkeling van leerlingen, math self-concept, math self-efficacy en math anxiety (Ashcraft & Moore, 2009; Maloney & Beilock, 2012; Lee, 2009; Prast et al., 2018; Usher & Pajares, 2008). Math self-concept betreft het zelfbeeld van leerlingen ten aanzien van rekenen. Het gaat om het eigen oordeel van de leerling over de mate waarin hij/zij goed denkt te zijn in rekenen volgens de eigen standaarden, het zelfbeeld met betrekking tot rekenen (Arens et al., 2020; Wolff et al., 2018). Math self-efficacy kan worden omschreven als competentiebeleving, de perceptie van de eigen competentie om rekentaken met succes te kunnen voltooien (Bandura, 1997). Leerlingen met hoge competentiegevoelens zijn meer dan anderen geneigd om moeilijke taken als een uitdaging te zien, hebben een sterk commitment met gestelde leerdoelen en hebben een grote bereidheid om nieuwe strategieën uit te proberen (Op 't Eynde et al., 2006). *Math anxiety*, dat wil zeggen rekenangst, is een emotie, een negatieve reactie op rekenen (Suárez-Pellicioni et al., 2016). Zo zijn er leerlingen die blokkeren op het moment dat ze een vel met sommen voorgelegd krijgen of die stressgevoelens ervaren op het moment dat de rekenles begint. Dit kan er bijvoorbeeld toe leiden dat leerlingen rekentaken gaan vermijden.

Leraar en de reken-wiskundige ontwikkeling

Leren rekenen en dus ook het reken-wiskundeonderwijs heeft betrekking op lange termijn leerprocessen. Leraren kunnen bijdragen aan de reken-wiskundige ontwikkeling van leerlingen. Dit kan bijvoorbeeld door interactief en activerend lesgeven, het gebruik van diverse materialen en representaties, door relaties te leggen tussen verschillende onderdelen van het rekenen en door bewuste keuzes te maken op welke manier het onderwijs kan worden afgestemd op leerlingen (Anthony & Walshaw, 2009; Hiebert & Grouws, 2007; Kyriakides et al., 2013). Het afstemmen van het reken-wiskundeonderwijs op de verschillen tussen leerlingen vraagt de nodige kennis en kunde van leraren. Zo moeten ze in staat zijn om vooruitgang te monitoren, inzicht hebben in wat leerlingen nodig hebben voor de verdere ontwikkeling en beschikken over voldoende vakspecifieke kennis en vaardigheden (Deunk et al., 2018; Hill et al., 2008; Prast et al., 2015).

Op basis van eerder onderzoek komen drie elementen naar voren die belangrijk lijken te zijn in relatie tot de reken-wiskundige ontwikkeling van leerlingen. Deze drie factoren zijn het leraarhandelen tijdens de rekenles, de vakspecifieke kennis en competentiebeleving van leraren ten aanzien van het (onderwijzen van) rekenen-wiskunde.

Ten aanzien van de eerste factor laten diverse onderzoeken zien dat er relaties zijn tussen het leraarhandelen tijdens de rekenles en de rekenprestaties van leerlingen, maar bevindingen zijn niet eenduidig (Seidel & Shavelson, 2007). Van de Grift (2007) heeft variabelen onderscheiden die gerelateerd zijn aan de kwaliteit van het onderwijzen. Deze kunnen worden gerangschikt van minder tot meer complex (Van der Lans et al., 2018). Zo is het scheppen van een veilig en stimulerend leerklimaat en klassenmanagement minder complex en is het afstemmen op verschillen en het aanleren van leerstrategieën complexer.

De tweede leraarfactor die in diverse onderzoeken samen blijkt te hangen met de rekenontwikkeling van leerlingen betreft de vakspecifieke kennis van het (onderwijzen van) rekenen-wiskunde van de leraar (Campbell et al., 2014; Hill et al., 2005). Gebaseerd op het raamwerk van Ball et al. (2008) kan worden gesteld dat het daarbij gaat om vakinhoudelijke reken-wiskundekennis, dus dat je boven de stof staat. Verder gaat het om kennis van het vak die specifiek is voor een leraar,

bijvoorbeeld hoe je kunt uitleggen, hoe je kunt afstemmen op verschillen, hoe je leerlingen tot diepgaander begrip brengt. En verder moet je zelf als leraar een gecijferde burger zijn, die situaties in het dagelijks leven kan interpreteren, verklaren en bevragen. Keijzer en Kool (2012) stellen dat een goede rekenleraar in staat moet zijn tot:

- het analyseren, beoordelen, parafraseren en evalueren van verschillende oplossingswijzen van leerlingen;
- het kunnen uitleggen en verklaren van de verschillende aanpakken;
- het kunnen visualiseren, noteren en verwoorden van die aanpakken;
- het kunnen produceren van de verschillende aanpakken, op verschillende manieren, op verschillende abstractieniveaus.

Ook ten aanzien van de vakspecifieke kennis zijn eerdere bevindingen niet eenduidig; in elk geval kan worden gesteld dat het niet de enige factor is die ertoe doet, maar dat de overtuigingen en attitude van de leraar ten aanzien van het onderwijs van rekenen-wiskunde wel een rol spelen (Wilkins, 2008).

De mate waarin leraren zichzelf competent vinden ten aanzien van het onderwijzen van het vak rekenen-wiskunde, is een derde factor die in verband wordt gebracht met de rekenprestaties van leerlingen. Indien een leraar gelooft in het eigen kunnen ten aanzien van het geven van goed reken-wiskundeonderwijs en het kunnen realiseren van leeractiviteiten waarmee doelen kunnen worden bereikt, werkt dat door op de prestaties van leerlingen (Perera & John, 2020; Tella, 2008). In een review studie van Klassen et al. (2011) wordt echter geconcludeerd dat de relaties tussen competentiebeleving van de leraar en de prestaties van leerlingen minder sterk waren dan als werd verondersteld.

Rekengesprekken

Het voeren van rekengesprekken, in het proefschrift aangeduid met 'dynamic math interviews', is een formatieve assessmentvorm waarbij leraren en andere onderwijsprofessionals op interactieve, procesgerichte wijze met de leerling in gesprek gaan met als doel de onderwijsbehoeften te achterhalen met actieve betrokkenheid van de leerling (Allsopp et al., 2008; Ginsburg, 1997, 2009; Van Luit, 2019). Het voeren van gesprekken met individuele leerlingen of met groepjes leerlingen in relatie tot rekenen is met de opkomst van meer interactief reken-wiskundeonderwijs - dus al vanaf de jaren zeventig - gepropageerd. Zo is er al eerder ontwikkelingsonderzoek gedaan binnen rekenen-wiskunde, waarbij interactieve gespreksvoering met leerlingen onderwerp van onderzoek was (o.a. Nelissen, 1987; Van Eerde, 1996). Het voeren van interactieve gesprekken is verder binnen opleiding en nascholing aangemoedigd ten behoeve van het achterhalen van reken-wiskundige denken leerprocessen en het begeleiden van leerlingen tot niveauverhoging. Bovendien is het voeren van gesprekken met leerlingen gestimuleerd om reflectievaardigheden van leraren in opleiding en leraren te bevorderen ten aanzien van de kwaliteit van de interactie tijdens de reken-wiskundeles en om praktijkkennis van leraren in opleiding en leraren te verrijken. Keijzer en Oonk (2020) geven in hun artikel over ruim 50 jaar ontwikkeling reken-wiskundeonderwijs een helder overzicht van initiatieven die daar aan hebben bijgedragen.

In twee studies van het promotieonderzoek stond het interactieve rekengesprek met de leerling centraal, waarin de leraar ontrafelt wat een leerling nodig heeft om zich verder te kunnen ontwikkelen op rekengebied. Tijdens een rekengesprek kan de leraar zicht krijgen op het beheersingsniveau van diverse rekenonderdelen, op de mate waarin de leerling beschikt over onderliggende/voorwaardelijke kennis en vaardigheden, op denk- en oplossingsprocessen van de leerling, en op de kwaliteiten van de leerling. Bovendien kan de leraar meer te weten komen over aan rekenen gerelateerde ervaringen, overtuigingen en emoties. De leerling heeft een actieve rol tijdens het rekengesprek doordat de leraar de leerling uitnodigt mee te denken over doelen, mogelijke oplossingen en/of werkzame aanpakken (Lee & Johnston-Wilder, 2013).

Het voeren van rekengesprekken vereist specifieke kennis en vaardigheden, zoals het creëren van een veilig en prettig klimaat, goede vragen stellen en responsief reageren, het inzetten van de nodige vakspecifieke kennis om goed te kunnen volgen hoe leerlingen denken en redeneren, de grenzen opzoeken van wat de leerling lukt en niet meer lukt, het op waarde schatten van gebruikte oplossingsstrategieën, en gevarieerde hulp kunnen inzetten (Campbell et al., 2014; Empson & Jacobs, 2008; Ginsburg, 1997; 2009). We verwachtten dat de benodigde kennis en vaardigheden

ontwikkeld zou kunnen worden door professionalisering gericht op rekengespreksvoering. Daarbij is het van belang dat de professionalisering gebaseerd is op effectief gebleken kenmerken, zoals focus op inhoud, actief leren, en samenwerken (Van Driel et al., 2012).

Context en opzet onderzoek

Het onderzoek vond plaats in twee achtereenvolgende schooljaren. Dezelfde leraren van groep 6 van 27 scholen verspreid over Nederland, deden twee jaar lang mee. Daarbij moet worden opgemerkt dat in het eerste jaar 31 leraren zijn gestart. Als gevolg van onder andere ziekte, zwangerschap en wisseling van baan vielen acht leraren uit en hebben uiteindelijk 23 leraren van 22 scholen twee jaar lang geparticipeerd. De groep leerlingen in jaar 1 is een andere groep leerlingen dan in jaar 2, de leraar kreeg immers in het tweede jaar een nieuwe groep leerlingen. In het eerste jaar zijn metingen uitgevoerd, maar vond geen interventie plaats. Dat jaar is de controle-conditie. Het tweede jaar waarin de interventie is uitgevoerd, betreft de experimentele conditie. De interventie bestond uit een professionaliseringsprogramma en een oefenperiode. Het professionaliseringsprogramma bestond uit vier dagdelen. De focus van het professionaliseringsprogramma was het verwerven van kennis en vaardigheden die nodig zijn voor adequate rekengespreksvoering. Nadat de leraren de bijeenkomsten hebben bijgewoond en in diezelfde periode ook hebben geoefend met het voeren van rekengesprekken, hebben ze in de maanden daarna nog meer geoefend met het voeren van rekengesprekken. De leraren hebben in deze tijdsspanne met zes leerlingen van verschillende rekenniveaus uit hun eigen klas een rekengesprek gevoerd.

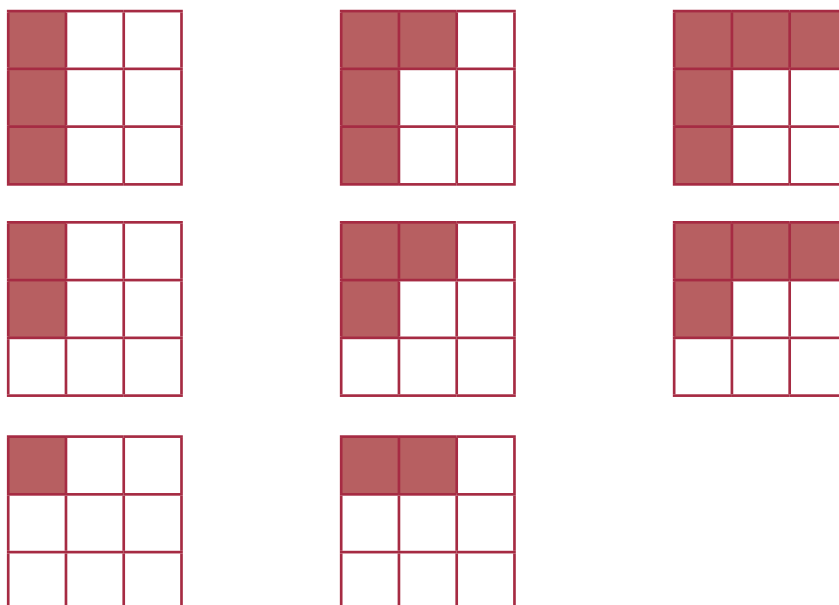
De vier studies in het kort

Studies 1 en 2

In de eerste twee studies is onderzocht in hoeverre de rekenontwikkeling van leerlingen in groep 6, voor zowel geautomatiseerde basiskennis alsmede reken-wiskundige probleemoplossingsvaardigheden, te voorspellen is vanuit de volgende leerlingfactoren: het rekenniveau aan het begin van groep 6, zelfbeeld en competentiebeleving ten aanzien van rekenen, mate van rekenangst en executieve vaardigheden. Ook is onderzocht in hoeverre de volgende leraarfactoren voorspellend zijn voor de rekenontwikkeling van leerlingen: leraarhandelen tijdens de rekenles, kennis van het (onderwijzen van) rekenen-wiskunde en de competentiebeleving ten aanzien van het onderwijzen van rekenen-wiskunde.

In studie 1 zijn data van 610 leerlingen en 31 leraren van groep 6 verzameld en via multilevel-analyses geanalyseerd. Daarbij heeft controle voor non-verbaal redeneervermogen plaatsgevonden, omdat dit een factor kan zijn die een onderliggende rol speelt bij probleemoplossingsvaardigheden. Daartoe is bij alle leerlingen de Raven's Standard Progressive Matrices afgenomen (Raven et al., 1998). Deze test bestaat uit 60 meerkeuzevragen, oplopend in moeilijkheidsgraad. De opgaven doen een beroep op waarnemen, logisch redeneren en vermogen tot abstractie. Bij onderstaand voorbeeld (afbeelding 1) moet de leerling uit acht mogelijke matrices de juiste matrix kiezen die op de open plek past.

► Afbeelding 1.
Voorbeeld van item uit de Raven.
Vanwege copyright zijn de acht
antwoordmogelijkheden waaruit
de leerling de juiste moet kiezen,
niet afgebeeld



De resultaten laten zien dat de ontwikkeling van geautomatiseerde basiskennis bij leerlingen van groep 6 mede wordt voorspeld vanuit het niveau van begin groep 6 en vanuit het zelfbeeld van leerlingen ten aanzien van rekenen. Echter, het leraarhandelen tijdens de reken-wiskundeles is negatief gerelateerd aan de ontwikkeling van geautomatiseerde basiskennis. Dus leraren met een hogere score op het handelen tijdens de rekenles hebben in hun klas leerlingen met een minder goede ontwikkeling van geautomatiseerde basisvaardigheden.

De ontwikkeling van reken-wiskundige probleemoplossingsvaardigheden wordt mede voorspeld vanuit het niveau van leerlingen aan het begin groep 6. Ook vakspecifieke kennis is voorspellend voor de ontwikkeling van reken-wiskundige probleemoplossingsvaardigheden van leerlingen. Het leraarhandelen tijdens de reken-wiskundeles en de competentiebeleving zijn daarentegen negatief gerelateerd.

We hadden verwacht dat het leraarhandelen tijdens de rekenles een belangrijke rol zou spelen in de rekenontwikkeling van leerlingen. Een mogelijke verklaring voor de onverwachte resultaten in deze studie kan zijn dat het onderwijzen van rekenen-wiskunde complex is en veel kennis en vaardigheden van leraren vereist, zoals kennis over doelen en didactiek, het goed kunnen uitleggen van bepaalde oplossingswijzen, het aanbieden van oplossingsstrategieën op verschillende abstractieniveaus en het bevorderen van zelfvertrouwen.

De door leraren zelf ingeschatte vakspecifieke kennis blijkt in deze studie mede een voorspeller te zijn voor de ontwikkeling van de probleemoplossingsvaardigheden van leerlingen. Mogelijk zijn leraren er zich van bewust dat er meer specifieke kennis van de leraar vereist is als het gaat om de wat complexere aspecten van het reken-wiskundeonderwijs, zoals het ondersteunen van het rekenleerproces van kinderen bij het oplossen van opgaven met een hoger abstractieniveau. Voor wat betreft de competentiebeleving ten aanzien van het onderwijzen van rekenen-wiskunde zijn de resultaten niet overeenkomstig de verwachtingen: geen significante relatie met de ontwikkeling van geautomatiseerde basisvaardigheden en een negatieve relatie met de ontwikkeling van reken-wiskundige probleemoplossingsvaardigheden. Diverse studies laten wel positieve relaties zien tussen competentiebeleving van leraren en de rekenprestaties van leerlingen. Wat mogelijk een rol heeft gespeeld is dat minder competente leraren niet goed in staat zijn om hun incompetentie te herkennen als het gaat om het onderwijzen van rekenen-wiskunde, wat kan leiden tot overschatting.

In de tweede longitudinale studie is de rol van executieve vaardigheden op de rekenontwikkeling van leerlingen onderzocht. Daarbij zijn visuospatieel en verbaal updaten, inhibitie en shifting onderscheiden. Ook in deze studie is gecontroleerd voor non-verbaal redeneervermogen. Dataverzameling heeft plaatsgevonden bij 458 leerlingen uit de totale leerlingpopulatie van 1062 leerlingen over de twee schooljaren heen. Binnen deze groep is sprake van een evenwichtige verdeling van laagpresterende, gemiddeld presterende en hoog presterende leerlingen (gebaseerd op het reken-niveau).

Allereerst is met een regressie-analyse de rol van geautomatiseerde basiskennis begin groep 6 en executieve vaardigheden op het prestatieniveau van reken-wiskundige probleemoplossingsvaardigheden eind groep 6 onderzocht. Daaruit blijkt dat geautomatiseerde basiskennis aan het begin van groep 6 een belangrijke voorspeller is. Van de vier executieve vaardigheden zijn visuospatieel en verbaal updaten ook voorspellers voor het prestatieniveau van probleemoplossingsvaardigheden eind groep 6, inhibitie en shifting zijn dat niet. Dit kan mogelijk te maken hebben met het gegeven dat updating ook als variabele in de studie betrokken is. In eerdere studies waarin naast updating ook andere executieve vaardigheden zijn betrokken, blijkt updating de sterkste voorspellende waarde te hebben (Wiley & Jarosz, 2012).

Vervolgens is een mediatie-analyse uitgevoerd om te onderzoeken welke factoren van directe en welke van indirecte invloed zijn op de ontwikkeling van probleemoplossingsvaardigheden in groep 6. Uit de resultaten blijkt dat de directe invloed van de geautomatiseerde basiskennis en probleemoplossingsvaardigheden aan het begin van groep 6 van invloed is op de ontwikkeling van deze kennis en vaardigheden gedurende groep 6. Inhibitie en shifting blijken gedurende groep 6 van toenemende invloed te zijn op de ontwikkeling van probleemoplossingsvaardigheden (via geautomatiseerde basiskennis aan het begin van groep 6), terwijl de rol van visuospatieel en verbaal updaten afneemt. Kennelijk doet de toenemende complexiteit van reken-wiskundige problemen in groep 6 een groter beroep op inhibitie en shifting. Denk bijvoorbeeld aan het grotere beroep dat bij complexe contextopgaven wordt gedaan op het kunnen onderdrukken van aandacht voor irrelevante informatie en op het flexibel schakelen van de ene bewerking naar de andere binnen

► Afbeelding 2.
Drie deelfragmenten uit
een rekengesprek

eenzelfde opgave. Bij het oplossen van reken-wiskundige probleemoplossingsvaardigheden blijken groep 6 leerlingen bovendien profijt te hebben van een voldoende geautomatiseerde basiskennis. In deze studie is bevestigd - overeenkomstig de verwachtingen gebaseerd op eerdere studies en de bevindingen van onze eerste studie - hoe belangrijk het voor leerlingen is, dat ze in de jaren voorafgaand aan groep 6 een stevige basis van reken-wiskundige kennis en vaardigheden opbouwen.

Studies 3 en 4

Voor zover ons bekend was nog niet empirisch onderzocht of rekengesprekken voeren een effectieve aanpak is om onderwijsbehoeften bij rekenen te achterhalen en of de aanpak bijdraagt aan reken-wiskundeonderwijs dat beter is afgestemd op leerlingen. In de laatste twee studies is onderzocht wat het effect is van de interventie op de kwaliteit van de gevoerde rekengesprekken, of rekengespreksvoering helpt bij het achterhalen van onderwijsbehoeften van leerlingen en of er sprake is van effecten op de leraarfactoren en op de rekenontwikkeling van leerlingen. Vanwege het niet voorhanden zijn van middelen is ten behoeve van dit onderzoek een raamwerk voor rekengespreksvoering ontwikkeld dat inmiddels is uitgegeven (Kaskens, 2018). Ook is een professionaliseringsprogramma ontwikkeld.

Om een idee te geven van een rekengesprek, staan in onderstaande afbeelding 2 drie deelfragmenten van rekengesprekken met een 'gemiddelde' rekenaar.

Inleiding bij twee fragmenten uit het deel van een rekengesprek, gericht op 'rekenbeleving':

Interactie met de leerling over beleving, ervaringen en emoties in relatie tot rekenen kan veel informatie opleveren over de wijze waarop de rekenontwikkeling verder kan worden bevorderd. In het raamwerk worden voorbeelden van diverse (soorten) vragen aangereikt, waarmee leraren hun repertoire kunnen uitbreiden. Uitgangspunt daarbij is dat de leraar ernaar streeft het rekengesprek een handelingsgericht en oplossingsgericht karakter te geven, waarbij de leerling een actieve rol heeft.

Fragment 1:

L: Heb je ook wel eens een som gemaakt waarvan je eerst dacht: wat moet ik hiermee... ik snap er niets van en waarbij het uiteindelijk toch is gelukt om de som te maken?

Il: Ja.

L: En hoe heb je dat toen aangepakt?

Il: Ik ging eerst even goed kijken naar die som en toen ging ik die in mijn rekenschrift uitrekenen. Alleen, ik snapte het toen niet en toen keek ik nog een keer goed naar de uitleg en keek nog eens goed wat er allemaal precies stond. Dat moest ik wel een paar keer doorlezen, maar toen dacht ik: Oh ja, zo moest het!

L: Dus wat jou helpt is dat je een paar keer heel goed de uitleg doorleest en dan pas gaat uitrekenen. Kun je eens vertellen of aanwijzen in het boek bij welke opgaven dat belangrijk is.

....

Toelichting:

In dit voorbeeld wordt actief gezocht naar de kwaliteiten van de leerling die er wel zijn. Je kunt hier als leraar ook doorvragen op emoties die een dergelijke ervaring oproept. Ook kan worden doorgevraagd op hoe leerlingen omgaan met opgaven die ze lastig vinden en situaties waarin het rekenen niet zo gemakkelijk is.

Fragment 2:

(de leerling heeft in het rekenboek aangewezen welke opgaven van het onderdeel breuken hij nog moeilijk vindt en de leraar heeft doorgevraagd op wat hij er moeilijk aan vindt). Het gesprek wordt vervolgd met:

Il: Ik denk dat ik nog wel een beetje hulp nodig heb?

L: Wat voor hulp zou je dan willen?

Il: Als ik dan een vraag heb, dan wil ik wat extra uitleg van iemand uit mijn groepje.

L: En wie uit jouw groepje zou die uitleg bij de breuken kunnen geven?

Il: S. en I.. Zij zijn goed in de breuken.

L: En wat voor uitleg kunnen zij dan geven zodat je het ook zelf gaat kunnen?

Il: Meestal is een tip genoeg. Soms twijfel ik en als ik het dan nog even vraag ben ik er meer zeker van.

.....

Toelichting:

In dit voorbeeld betreft de leraar de leerling actief in het meedenken over de hulp die de leerling nodig heeft. Het is van belang om goed door te vragen over wie kan helpen, hoe de hulp eruit moet zien, wat eerder heeft gewerkt, et cetera zodat een rekengesprek direct informatie oplevert voor het vervolg.

Fragment 3 uit deel van een rekengesprek gericht op 'rekenproces':

Startopgave betreft vier ijsjes, waarbij de prijs per bolletje moet worden vergeleken. De leerling is dit nu aan het uitrekenen voor een ijsje met vier bolletjes dat € 2,40 kost.

Il: Ik maak er een makkelijke som van. Ik doe dan 24 gedeeld door 4 is uhm 6, want 6×4 is 24. Uhm, ik heb er een nul afgehaald, dus dan moet ik er nog een nul bij doen, dus dat is 60.

L: Ja, en wat is die 60 dan?

Il: 60 cent voor 1 bolletje. Dus dan is die nog steeds meer dan die (ander ijsje), dus antwoord c moet het zijn, die prijs is het laagst.

L: Heel goed, dat heb je goed doordacht. Ik begrijp nu helemaal hoe je achter het antwoord bent gekomen.

Toelichting:

Deze startopgave is voorgelegd aan de leerling, omdat deze opgave fout was gemaakt tijdens de afname van de Cito-rekentoets en de leraar meer te weten wilde komen over het oplossingsproces. Deze leerling laat zien dat hij op basis van de context weet welke berekeningen hij moet maken om tot de oplossing te komen. Bovendien laat hij zien dat hij deze deling en vermenigvuldiging vlot en accuraat uitvoert. Interessant aspect is in hoeverre de leerling niet trucmatig te werk gaat bij het eraf halen en erbij doen van de nul. Dat wordt niet nagegaan door de leraar. De leerling geeft wel betekenis aan het antwoord in relatie tot de opgave.

Een leraar kan ervoor kiezen om dit tijdens deze opgave zo te laten om aspecten in het vervolg nader uit te diepen. In het raamwerk zijn 'beslismomenten' aangegeven waarbij de leraar het vervolg van het rekengesprek overdenkt. Daarbij kan de vervolgstap worden gericht op begripsvorming, procedureontwikkeling, vlot leren rekenen en automatiseren, en op toepassen en flexibel rekenen.

In de derde studie zijn effecten onderzocht van rekengespreksvoering op leraarfactoren van 23 leraren die beide jaren aan het onderzoek hebben deelgenomen. De interventie bestond uit een professionaliseringsprogramma gevolgd door een periode van oefening in het voeren van rekengesprekken met leerlingen. Door middel van een voor- en nameting is nagegaan wat het effect is van het professionaliseringsprogramma op de kwaliteit van de rekengesprekken, die voorafgaand en aan het eind van de professionalisering op video zijn opgenomen en zijn geanalyseerd. Uit de resultaten komt naar voren dat het professionaliseringsprogramma effect heeft op de volgende aspecten die bijdragen aan de kwaliteit van de rekengesprekken: de leraren stellen meer vragen gericht op ervaringen en beleving ten aanzien van leren rekenen en op het redeneer- en oplossingsproces van een leerling, ze creëren een veiliger en stimulerender klimaat tijdens het rekengesprek, en ze vatten vaker -in samenspraak met de leerling- de onderwijsbehoeften van de leerling op rekengebied samen. In vergelijking met de voormeting waren de rekengesprekken tijdens de nameting op meer verschillende aspecten gericht die een rol spelen bij de rekenontwikkeling, bijvoorbeeld niet alleen op de rekenkennis, maar ook op ervaringen met rekenen.

Om de effecten van de interventie op leraren te onderzoeken zijn de leraarfactoren met behulp van lesobservaties en vragenlijsten gemeten op drie momenten voorafgaand aan en één moment na de interventie aan het eind van het schooljaar. De effecten op alle drie de leraarfactoren waren signi-

ficant. Opvallend is dat er grote effecten van de interventie zijn op de meer complexere aspecten van het leraarhandelen tijdens de rekenles: activerend leren, differentiëren en afstemmen, en het onderwijzen van leerstrategieën en rekenspecifieke onderwijsstrategieën. Op de minder complexe aspecten was sprake van geringe effecten: veilig en stimulerend leerklimaat, klassenmanagement en het geven van een duidelijke instructie. De interventie heeft bovendien effect op de door de leraren zelf ingeschatte vakspecifieke kennis en competentiebeleving.

De rekengesprekken die zowel tijdens het professionaliseringsprogramma als in de daaropvolgende oefenperiode zijn gevoerd, leveren informatie op over de rekenontwikkeling van de leerlingen. De verkregen input tijdens de rekengesprekken blijkt van invloed te zijn geweest op het leraarhandelen tijdens de rekenles, en heeft bovendien positief bijgedragen aan de door de leraren zelf ingeschatte vakspecifieke kennis en competentiebeleving. Er lijkt een wisselwerking te zijn tussen het ontwikkelen van kennis en vaardigheden van leraren door middel van de interventie en hun percepties.

In de laatste studie is onderzoek gedaan naar de effectiviteit van rekengesprekken als aanpak voor het achterhalen van onderwijsbehoeften van laagpresterende leerlingen en naar effecten op leerlingfactoren. Met 'laagpresterend' gaat het om leerlingen die beneden het 20^e percentiel scoorden op de Cito rekentoets. Er zijn 19 rekengesprekken kwalitatief geanalyseerd. Uit de resultaten blijkt dat in 18 van de 19 rekengesprekken de onderwijsbehoeften van de leerlingen ten aanzien van rekenen-wiskunde worden achterhaald, de hoofddoelstelling van rekengespreksvoering. Voorbeelden van onderwijsbehoeften zijn de behoefte aan extra instructie, zorgvuldiger lezen, gebruik van materialen, het noteren van tussenstappen of tussenuitkomsten, samenwerken met bepaalde leerlingen, oefenen van bepaalde vaardigheden, vragen durven stellen tijdens de rekenles, niet opgeven.

De analyse ten aanzien van kwaliteitsaspecten van rekengespreksvoering laat zien dat de meerderheid van de leraren tijdens de oefenperiode aanzienlijke vooruitgang boekt. Daar heeft de professionalisering en oefening mogelijk aan bijgedragen. Voor zes leraren kan worden geconcludeerd dat op alle aspecten sprake is van een rekengesprek van goede kwaliteit. Daarbij is het van belang om op te merken dat kwaliteitsaspecten in samenhang tot elkaar moeten worden bekeken.

Een beduidend verschil tussen de gemeten leerlingfactoren van de experimentele en de controlegroep, te weten rekenontwikkeling, zelfbeeld, competentiebeleving en mate van rekenangst, is er alleen ten aanzien van het niveau van automatisering van aftrekken en vermenigvuldigen. Daarnaast is een positieve tendens gebleken ten aanzien van de vooruitgang in probleemoplossingsvaardigheden van leerlingen.

Conclusies, beperkingen en aanbevelingen voor de praktijk

De bevindingen van het onderzoek benadrukken het belang van een solide reken-wiskundige basis in de jaren voorafgaand aan groep 6. Veel aandacht besteden aan het uitbreiden, verfijnen en verdiepen van het conceptueel begrip, feitelijke kennis en procedurele vaardigheden is dus van belang. Executieve functies zijn eveneens naar voren gekomen als een factor van betekenis in de rekenontwikkeling van leerlingen. Als het gaat om het bevorderen van executieve functies blijkt uit eerdere studies, dat interventies met name effectief zijn als deze direct in relatie staan tot rekenspecifieke doelen tijdens de rekenles (Gunzenhauser & Nückles, 2021). Denk bijvoorbeeld aan het demonstreren dat de leerling de opgave eerst zorgvuldig moet lezen, relevante informatie uit een opgave moet halen en moet nadenken over de aanpak alvorens de berekening uit te voeren, of leerlingen ondersteunen door een complex probleem in hanteerbare delen op te splitsen.

Een duidelijke relatie is aangetoond tussen het zelfbeeld van leerlingen ten aanzien van rekenen en geautomatiseerde basiskennis. Het bekrachtigt het belang om juist in de leerjaren voorafgaand aan groep 6 optimale kansen te bieden om te leren rekenen. Daarmee kan worden bijgedragen aan voldoende zelfvertrouwen ten aanzien van rekenen en aan meer vertrouwen bij het oplossen van reken-wiskundige problemen, ook als deze wat complexer worden. Denk daarbij bijvoorbeeld aan opgaven waarbij combinaties van strategieën nodig zijn om tot de oplossing te komen. Aangezien leerlingen in groep 6 namelijk meer ervaring hebben opgedaan met het verwerven van basisvaardigheden in vergelijking met het oplossen van complexe reken-wiskundeopgaven, kan het zinvol zijn om specifieke interventies uit te voeren die gericht zijn op het ontwikkelen van probleemoplossingsvaardigheden.

In dit onderzoek zijn ook onverwachte resultaten gevonden. De door leraren zelf ingeschatte vakspecifieke kennis is een voorspeller gebleken voor de ontwikkeling van de probleemoplossingsvaardigheden, maar het leraarhandelen tijdens de rekenles en de competentiebeleving van leraren niet.

Het onderwijzen van rekenen-wiskunde in groep 6 blijkt complex te zijn en vraagt veel kennis en vaardigheden van leraren. Om de reken-wiskundige ontwikkeling van leerlingen te bevorderen en af te stemmen op de onderwijsbehoeften van leerlingen, is het noodzakelijk dat leraren weloverwogen keuzes maken tijdens voorbereiding en uitvoering van de rekenles. Om de verschillende onderwijsbehoeften van leerlingen te achterhalen is gebruikgemaakt van rekengesprekken. Dit blijkt een veelbelovende aanpak te zijn die door leraren en andere onderwijsprofessionals kan worden ingezet om de onderwijsbehoeften te achterhalen, aanvullend op standaard toetsen. Effecten op leerlingresultaten zijn beperkt aangetoond. Leren rekenen is een langetermijnproces en effecten op de betreffende leerling zijn misschien pas te verwachten na een langere tijd en/of na meerdere rekengesprekken. Leraren profiteren van een professionaliseringsprogramma en oefening, gericht op het adequaat leren voeren van rekengesprekken. Effecten zijn gedemonstreerd op leraarhandelen tijdens de rekenles en de ingeschatte vakspecifieke kennis en competentiebeleving. De informatie die leraren verkrijgen tijdens rekengesprekken met verschillende leerlingen kan bevorderend zijn voor de kwaliteit van de reken-wiskundeles en kan leraren ondersteunen in het toepassen van interventies binnen de zone van naaste ontwikkeling van leerlingen (Vygotsky, 1978).

Beperkingen kent dit onderzoek ook. Allereerst is de onderzoeksgroep relatief klein. Verder zijn er kwantitatieve meetinstrumenten gebruikt om te bepalen in hoeverre er effecten zijn op de rekenontwikkeling van de leerlingen en op het handelen, competentiebeleving en vakspecifieke kennis van de leraren. Het gebruik van meetinstrumenten die meer procesgericht zouden zijn, zoals analyseren van rekenwerk, *think-alouds*, zouden een verrijking kunnen zijn. Dan zouden er meer gegevens kunnen worden verkregen over bijvoorbeeld aanpak, redeneerprocessen, strategiegebruik, en metacognitieve aspecten van leerlingen. Ook ten aanzien van de leraarfactoren is dit het geval. Zo zou er meer informatie kunnen worden verkregen door de rekenlessen op micro-niveau te analyseren, waardoor je meer zicht kunt krijgen op bijvoorbeeld kwaliteit van de uitleg, gebruikte (reken)taal, interactie en responsiviteit.

Het analytisch raamwerk dat is ontwikkeld om de rekengesprekken te analyseren is een startpunt en vraagt om verdere uitdieping, uitbreiding en verfijning. Zo zou de analyse van de adequaatheid van de respons door de leraar kunnen worden uitgediept door na te gaan in hoeverre de leraar adequaat doorvraagt in reactie op wat een leerling zegt en of de leraar op het juiste moment gepaste hulp aanbiedt. In de professionalisering hebben leraren gereflecteerd op diverse aspecten van rekengespreksvoering. Een aanbeveling voor vervolgonderzoek is het betrekken van het meten van het niveau van reflectie van leraren op de rekengesprekken.

Afsluitend, zetten we nog enkele aanbevelingen op een rij:

- Zorg voor optimale kansen voor alle leerlingen om een goede rekenbasis op te bouwen in de leerjaren voorafgaand aan groep 6 en blijf ook na groep 5 die rekenbasis verstevigen.
- Stimuleer executieve functies in relatie tot rekenspecifieke doelen tijdens de rekenles.
- Blijf als leraar werken aan het opbouwen, uitbreiden en uitdiepen van vakspecifieke kennis van het (onderwijzen van) rekenen-wiskunde.
- Rekengespreksvoering komt niet alleen ten goede aan het achterhalen van onderwijsbehoeften van de leerlingen waarmee een gesprek wordt gevoerd, maar ook aan aspecten die van belang zijn voor het geven van goed reken-wiskundeonderwijs. Jezelf ontwikkelen op het gebied van rekenen-wiskunde loont te moeite.

Noot

¹ We willen hierbij opmerken dat reken-wiskundige probleemoplossingsvaardigheden worden gedefinieerd als het oplossen van niet-routinematige reken-wiskundige problemen, waarbij kinderen worden uitgedaagd om eigen oplossingswijzen te bedenken en toe te passen (Polya, 1957; Doorman et al., 2007). In dit promotieonderzoek wordt uitgegaan van rekenopgaven waarin reken-wiskundige notaties en tekst en/of illustraties worden gebruikt.

Literatuur

- Allsopp, D. H., Kyger, M. M., Lovin, L. A., Gerretson, H., Carson, K. L., & Ray, S. (2008). Mathematics dynamic assessment: Informal assessment that responds the needs of struggling learners in mathematics. *Council for Exceptional Children*, 40(3), 6–16. <https://doi.org/10.1177/004005990804000301>
- Andersson, U. (2008). Working memory as a predictor of written arithmetical skills in students: The importance of central executive functions. *British Journal of Educational Psychology*, 78(June), 181–203. <https://doi.org/10.1348/000709907X209854>

- Anthony, G., & Walshaw, M., (2009). Characteristics of effective teaching of mathematics: A view from the West. *Journal of Mathematics Education*, 2(2), 147–164. www.researchgate.net/publication/228743535
- Arens, A. K., Frenzel, A. C., & Goetz, T. (2020). Self-concept and self-efficacy in math: Longitudinal interrelations and reciprocal linkages with achievement. *The Journal of Experimental Education*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1080/00220973.2020.1786347>
- Ashcraft, M. H., & Moore, A. M. (2009). Mathematics anxiety and the affective drop in performance. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 27(3), 197–205. <https://doi.org/10.1177/0734282908330580>
- Baddeley, A. D. (2000). The episodic buffer: A new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences*, 4(11), 417–423. [https://doi.org/10.1016/S1364-6613\(00\)01538-2](https://doi.org/10.1016/S1364-6613(00)01538-2)
- Bailey, D. H., Watts, T. W., Littlefield, A. K., & Geary, D. C. (2014). State and trait effects on individual differences in children's mathematical development. *Psychological Science*, 25(11), 2017–2026. <https://doi.org/10.1177/0956797614547539>
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. Freeman.
- Beilock, S. L., & Maloney, E. A. (2015). Math anxiety: A factor in math achievement not to be ignored. *Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences*, 2(1), 4–12. <https://doi.org/10.1177/2372732215601438>
- Boonen, A. J. H., Van der Schoot, M., Van Wesel, F., De Vries, M. H., & Jolles, J. (2013). What underlies successful word problem solving? A path analysis in sixth grade students. *Contemporary Educational Psychology*, 38(3), 271–279. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2013.05.001>
- Bull, R., & Scerif, G. (2001). Executive functioning as a predictor of students' mathematics ability: Inhibition, switching, and working memory. *Developmental Neuropsychology*, 19(3), 273–293. https://doi.org/10.1207/S15326942DN1903_3
- Campbell, P. F., Nishio, M., Smith, T. M., Clark, L. M., Conant, D. L., Rust, A. H., Neumayer DePiper, J., Frank, T. J., Griffin, M., & Choi, Y. (2014). The relationship between teachers' mathematical content and pedagogical knowledge, teachers' perceptions, and student achievement. *Journal of Research in Mathematics Education*, 45(4), 419–459. <http://www.jstor.org/stable/10.5951/jresmetheduc.45.4.0419>
- Charalambous, C. Y. (2015). Working at the intersection of teacher knowledge, teacher beliefs, and teaching practice: A multiple-case study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(5), 427–445. <https://doi.org/10.1007/s10857-015-9318-7>
- Chinn, S. (2012). Beliefs, anxiety, and avoiding failure in mathematics. *Child Development Research*, 12, Article 396071. <https://doi.org/10.1155/2012/396071>
- Cirino, P. T., Tolar, T. D., Fuchs, L. S., Huston-Warren, E. (2016). Cognitive and numerosity predictors of mathematical skills in middle school. *Journal of Experimental Child Psychology*, 145, 95–119. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.12.010>
- Cragg, L., Keeble, S., Richardson, S., Roome, H. E., & Gilmore, C. (2017). Direct and indirect influences of executive functions on mathematics achievement. *Cognition*, 162(May), 12–26. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2017.01.014>
- Deunk, M., Smale-Jacobse, A., De Boer, H., Doolaard, S., & Bosker, R. (2018). Effective differentiation practices: A systematic review and meta-analysis of studies on the cognitive effects of differentiation practices in primary education. *Educational Research Review*, 24(1), 31–54. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2018.02.002>
- Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., De Lange, J., & Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands. *ZDM Mathematics Education*, 39, 405–418. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0043-2>
- Empson, S. B., & Jacobs, V. R. (2008). Learning to listen to children's mathematics. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 257–281). Sense publishers. https://doi.org/10.1163/9789087905460_013
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., & Capizzi, A. M. (2006). The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 98(1), 29–43. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.98.1.29>
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Stuebing, K., Fletcher, J. M., Hamlett, C. L., & Lambert, W. (2008). Problem-solving and computational skill: Are they shared or distinct aspects of mathematical cognition? *Journal of Educational Psychology*, 100(1), 30–47. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.100.1.30>
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4–15. <https://doi.org/10.1177/00222194040370010201>
- Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: A 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology*, 47(6), 1539–1552. <https://doi.org/10.1037/a0025510>
- Geary, D. C., & Hoard, M. K. (2005). Learning disabilities in arithmetic and mathematics: Theoretical and empirical perspectives. In J. I. D. Campbell (Eds.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 253–267). Psychology Press.
- Ginsburg, H. P. (1997). *Entering the child's mind*. Cambridge University Press.
- Ginsburg, H. P. (2009). The challenge of formative assessment in mathematics education: Children's minds, teachers' minds. *Human Development*, 52(2), 109–128. <https://doi.org/10.1159/000202729>
- Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin F. L., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(Suppl. 1), 105–123. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6>
- Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 371–404). IAP.
- Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430–511. <https://doi.org/10.1080/07370000802177235>

- Hoth, J., Döhrmann, M., Kaiser, G., Busse, A., König, J., & Blömeke, S. (2016). Diagnostic competence of primary school mathematics teachers during classroom situations. *ZDM Mathematics Education*, 48(1-2), 1–53. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0759-y>
- Kaskens, J., Segers, E., Goei, S. L., Van Luit, J. E. H., & Verhoeven, L. (2020). Impact of children's self-concept, self-efficacy and math anxiety and teacher competence on mathematical development. *Teaching and Teacher Education*, 94, 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103096>
- Kaskens, J. (2018). *Rekengesprekken voeren*. Pica.
- Keijzer, R. & Kool, M. (2012). *Mathematical knowledge for teaching in the Netherlands*. Paper presented at the COEX, 12th International congress on mathematical education, Seoul, Korea.
- Keijzer, R. & Oonk, W. (2020). Ruim 50 jaar ontwikkeling reken-wiskundeonderwijs. *Volgens Bartjens – ontwikkeling en onderzoek*, 39(3), 47-65.
- Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109–129. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.92.1.109>
- Klassen, R. M., Tze, V. M. C., Betts, S. M., & Gordon, K. A. (2011). Teacher efficacy research 1998-2009: Signs of progress or unfulfilled promise? *Educational Psychology Review*, 23(1), 21-43. <https://doi.org/10.1007/s10648-010-9141-8>
- Kyriakides, L., Christoforou, C., & Charalambous, C. Y. (2013). What matters for student learning outcomes: A meta-analysis of studies exploring factors of effective teaching. *Teaching and Teacher Education*, 36(November), 143–152. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.07.010>
- Lebens, M., Graff, M., & Mayer, P. (2011). The affective dimensions of mathematical difficulties in schoolchildren. *Educational Research International*, 11, Article 487072. <https://doi.org/10.1155/2011/487072>
- Lee, J. (2009). Universals and specifics of math self-concept, math self-efficacy, and math anxiety across 41 PISA 2003 participating countries. *Learning and Individual Differences*, 19(3), 355–365. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2008.10.009>
- Lee, C., & Johnston-Wilder, S. (2013). Learning mathematics-letting the pupils have their say. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 163–180. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9445-3>
- Lester, F. K. Jr. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 245–277. <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol10/iss1/12>
- Maloney, E. A., & Beilock, S. L. (2012). Math anxiety: Who has it, why it develops, and how to guard against it. *Trends in Cognitive Science*, 16(10), 404–406. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.06.008>
- Miyake, A., Friedman, N. P., Emerson, M. J., Witzki, A. H., & Howerter, A. (2000). The unity and diversity of executive functions and their contributions to complex 'frontal lobe' tasks: A latent variables analysis. *Cognitive Psychology*, 41(1), 49-100. <https://doi.org/10.1006/cogp.1999.0734>
- Nelissen, J. (1987). *Kinderen leren wiskunde. Een studie over constructie en reflectie in het basisonderwijs*. De Ruiter.
- Op't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2006). Accepting emotional complexity: A socio-constructivist perspective on the role of emotions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 193–207. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9034-4>
- Perera, H. N., & John, J. E. (2020). Teachers' self-efficacy beliefs for teaching math: Relations with teacher and student outcomes. *Contemporary Educational Psychology*, 61, Article 101842. <https://doi.org/j.cedpsych.2020.101842>
- Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. 2nd ed. Princeton University Press.
- Prast, E. J., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2015). Readiness-based differentiation in primary school mathematics: Expert recommendations and teacher self-assessment. *Frontline Learning Research* 3(2), 90–116. <https://doi.org/10.14786/flrv3i2.163>
- Prast, E. J., Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2018). Teaching students with diverse achievement levels: Observed implementation of differentiation in primary mathematics education. In E. Prast, *Differentiation in primary mathematics education* (pp. 53–79). Utrecht University. <http://dspace.library.uu.nl/handle/1874/364287>
- Raven, J., Raven, J. C., & Court, J. H. (1998). *Manual for Raven's Progressive Matrices and Vocabulary Scales. Section 3: The Standard Progressive Matrices*. Oxford Psychologist Press.
- Seidel, T., & Shavelson, R. J. (2007). Teaching effectiveness research in the past decade: The role of theory and research design in disentangling meta-analysis results. *Review of Educational Research*, 77(4), 454–499. <https://doi.org/10.3102/0034654307310317>
- Suárez-Pellicioni, M., Núñez-Peña, M. I., & Colomé, A. (2016). Math anxiety: A review of its cognitive consequences, psychophysiological correlates, and brain bases. *Cognitive, Affective, and Behavioral Neuroscience* 16(1), 3–22. <https://doi.org/10.3758/s13415-015-0370-7>
- Tella, A. (2008). Teacher variables as predictors of academic achievement of primary school pupils mathematics. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 1(1), 17–33. <https://iejee.com/index.php/IEJEE/article/view/4>
- Tout, D., & Gal, I. (2015). Perspectives on numeracy: Reflections from international assessments. *ZDM - Mathematics Education*, 47(4), 691–706. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0672-9>
- Träff, U., Olsson, L., Östergren, R., & Skagerlund, K. (2020). Development of early domain-specific and domain-general cognitive precursors of high and low math achievers in grade 6. *Child Neuropsychology*, 26(8), 1–25. <https://doi.org/10.1080/09297049.2020.1739259>
- Usher, E. L., & Pajares, F. (2008). Sources of self-efficacy in school: Critical review of the literature and future directions. *Review of Educational Research*, 78(4), 751–796. <https://doi.org/10.3102/0034654308321456>
- Van de Grift, W. (2007). Quality of teaching in four European countries: A review of the literature and application of an assessment instrument. *Educational Research*, 49(2), 127–152. <https://doi.org/10.1080/00131880701369651>
- Van der Lans, R. M., Van de Grift, W. J. C. M., & Van Veen, K. (2018). Developing an instrument for teacher feedback: Using the Rasch model to explore teachers' development of effective teaching strategies and behaviors. *The Journal of Experimental Education*, 86(2), 247–264. <https://doi.org/10.1080/00220973.2016.1268086>

- Van Driel, J., Meirink, J., Van Veen, K., & Zwart, R. (2012). Current trends and missing links in studies on teacher professional development in science education: A review of design features and quality of research. *Studies in Science Education*, 48(2), 129–160. <https://doi.org/10.1080/03057267.2012.738020>
- Van Eerde, D. (1996). *Kwantitwijzer. Diagnostiek in reken-wiskundeonderwijs*. Zwijssen.
- Van Hoogmoed, A., Hofstetters, W., Post, W., Ruijsenaars, W., & Minnaert, A., (2021). Het belang van automatiseren. *Jeugd in School en Wereld*, 1(sept.), 32-35.
- Van Luit, J. E. H. (2019). Diagnostics of dyscalculia. In A. Fritz, V. G. Haase, & P. Räsänen (Eds.), *International handbook of mathematical learning difficulties: From the laboratory to the classroom* (pp. 653–668). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_38.
- Veldhuis, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Vermeulen, J. A., & Eggen, T. J. H. M. (2013). Teachers' use of classroom assessment in primary school mathematics education in the Netherlands. *Cadmo*, 21(2), 35–53. <https://doi.org/10.3280/CAD2013-002004>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Cambridge.
- Walshaw, M., & Anthony, G. (2008). The teacher's role in classroom discourse: A review of recent research into mathematics classrooms. *Review of Educational Research*, 78(3), 516–551. <https://doi.org/10.3102/0034654308320292>
- Wiley, J., & Jarosz, A. F. (2012). How working memory capacity affects problem solving. *Psychology of Learning and Motivation*, 56(6), 185–227. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-394393-4.00006-6>
- Wilkins, J. L. M. (2008). The relationship among elementary teachers' content knowledge, attitudes, beliefs, and practices. *Journal of Math Teacher Education*, 11(2), 139–164. <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9068-2>
- Wolff, F., Helm, F., Zimmerman, F., Nagy, G. & Möller, J. (2018). On the effects of social, temporal, and dimensional comparisons on academic self-concept. *Journal of Educational Psychology*, 110(7), 1005–1025. <https://doi.org/10.1037/edu0000248>

Jarise Kaskens' PhD research project was focused on the roles of various child and teacher factors in the mathematical development of fourth grade children. The results showed the importance of establishing a solid mathematical foundation in the years leading up to elementary school grade 4. Executive cognitive functioning also contributed the mathematical development. Inhibition and shifting indirectly contributed to the development of mathematical problem-solving via arithmetic fluency. The research reported on here shed also a light on the roles of math-related experiences, beliefs and emotions in the mathematical development. Math self-concept predicted arithmetic fluency. Regarding the roles of teacher factors, the mathematical knowledge for teaching played a predictive role in the development of the children's mathematical problem-solving.

More and more educational professionals support that forms of formative assessment are called for to provide more process-focused, supplemental information on children's mathematics learning needs. One such form of formative assessment is the so-called dynamic math interview aimed to identify children's math learning needs. Understanding these needs is a prerequisite for adapting one's teaching to children's needs. In this research, the intervention consisted of participation of teachers in a professional development program to develop their dynamic math interviewing competencies, followed by a period of practice using dynamic math interviewing. With the information gained by dynamic math interviewing, teachers can better attune their math lessons on children's varying math learning needs. The outcomes of the present research could be used in pre-service and in-service training and in educational practice.