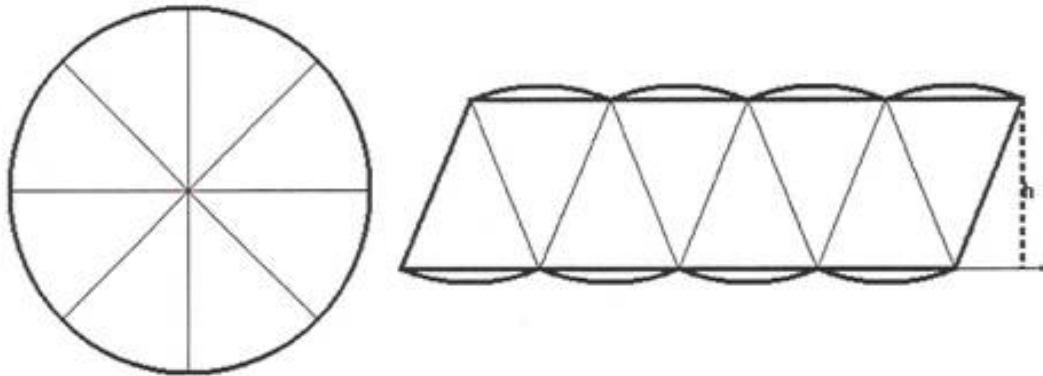


Onderzoeksverslag *Het 6E-model en het hoofdstuk oppervlakte*

Hoe kun je leerlingen zelf de leerstof laten ontdekken?



Naam student: Ward Perenboom

E-mailadres student: w.perenboom@live.nl

Studierichting: Wiskunde voltijd

Studentnummer: 513831

Naam school: Udens College sector HAVO/VWO

Naam en e-mailadres begeleider school: Evelien Naterop, E.Naterop@udenscollege.nl

Naam en e-mailadres begeleider ILS HAN: Ton Konings, Ton.Konings@han.nl

Naam studieloopbaanbegeleider: Ton Konings, Ton.Konings@han.nl

(Werk)Titel afstudeeronderzoek: *Het 6E-model en het hoofdstuk Oppervlakte: hoe kun je leerlingen zelf de leerstof laten ontdekken?*

Datum: 3 juni 2016

1 Voorwoord

Dit onderzoeksverslag heb ik geschreven tijdens mijn Lio-stage op het Udens College sector HAVO/VWO voor mijn tweedegraadsopleiding tot leraar wiskunde. Voor het onderzoek is een lessenserie ontwikkeld en uitgevoerd, waarin leerlingen van klas V2A zelfontdekkend bezig zijn gegaan. Die lessenserie is gebaseerd op richtlijnen die voortkomen uit een literatuurstudie. Graag vermeld ik bij deze dat het grootste deel van het theoretisch kader dat daaruit is geschreven, is toegevoegd als bijlage, zodat het theoretisch kader in dit onderzoeksverslag beperkt is gebleven. Voor de geïnteresseerde lezer verwijs ik alvast naar bijlage 2. De verwijzingen naar literatuur in die bijlage zijn opgenomen in de algemene literatuurlijst van dit document.

In dit onderzoeksverslag, het resultaat van mijn afstudeeronderzoek, zitten heel wat uren werk. Uren die voorbij zijn gevlogen, bijvoorbeeld bij het ontwerpen van lesmateriaal, maar ook uren die zijn gevuld met piekeren, twijfel en vastlopen. Gedurende het hele onderzoek heeft Ton Konings, mijn onderzoeksbegeleider en SLB van de HAN, mij ontzettend geholpen om de voorbereiding, uitvoering en verslaglegging tot een succes te maken. Hij heeft mij geholpen om tijdens het proces niet verdwaald te raken. En zijn advies om het een en ander met beleid te doen, heeft mij in de eindfase geholpen om de zaken rond te krijgen. Medestudenten en mede-onderzoekers van het 6E-model Jelle Torres Ruano en Roy Pouwel hebben, niet wetende, met hun producten voor mij de richting aangegeven op cruciale momenten. Daarvoor dank.

Klas V2A heeft het geweldig gedaan. Het is een ontzettend fijne en vriendelijke klas om mee te werken. Zij hebben de lessen mede tot een succes gemaakt, en hebben de vragenlijst en interviews serieus genomen. Bedankt daarvoor!

Ward Perenboom

Nijmegen, juni 2016

2 Inhoudsopgave

1	VOORWOORD	2
2	INHOUDSOPGAVE	3
3	SAMENVATTING	5
4	PROBLEEMVERKENNING	6
4.1	AANLEIDING, CONTEXT EN PROBLEEMVERKENNING	6
4.2	THEORETISCH KADER	8
4.2.1	Het 6E-model	8
4.2.2	De fasen van het 6E-model nader bekeken	10
4.3	LEERSTOFANALYSE	14
4.4	ONTWERP LESSEN EN LESMATERIAAL	16
4.5	ONDERZOEKSVRAAG	18
5	UITVOERING VAN HET ONDERZOEK	19
5.1	DE ONDERZOEKSGROEP	19
5.2	ONDERZOEKSMETHODE	20
5.3	INSTRUMENTEN	21
5.3.1	Video	21
5.3.2	Lesobservatie	21
5.3.3	Analyse van ingevulde opgavenbladen	21
5.3.4	Vragenlijst	22
5.3.5	Interview	22
5.3.6	Proefwerkanalyse	22
6	ONDERZOEKSRESULTATEN	24
6.1	OVERZICHT VAN DE 6E-LESSEN	24
6.2	ANALYSE PER 6E-LES	25
6.2.1	Les 1: parallelogrammen	25
6.2.2	Les 2: driehoeken	26
6.2.3	Les 3: omtrek van een cirkel	27
6.2.4	Les 4: oppervlakte van een cirkel	28
6.3	ANALYSE PER 6E-FASE	29
6.3.1	Fase E1: evalueren van de begincompetenties	29
6.3.2	Fase E2: engageren	30
6.3.3	Fase E3: exploreren	31
6.3.4	Fase E4: empirische kennis toepassen	32
6.3.5	Fase E5a: expliciteren (zelfstandig)	33
6.3.6	Fase E5b: expliciteren (klassikaal)	34
6.3.7	Fase E6: eindcompetenties consolideren	35
6.4	ANALYSE VAN DE VRAGENLIJST EN HET INTERVIEW	36
6.5	PROEFWERKANALYSE	39
7	CONCLUSIE	40
7.1	BEANTWOORDING HOOFDVRAAG	40
7.2	BEANTWOORDING DEELVRAGEN	40
8	DISCUSSIE	43
9	REFLECTIE	45
10	LITERATUUR	46

11	BIJLAGEN	47
	BIJLAGE 1: OVERZICHTSKAART VAN HET 6E-MODEL (<i>WINDELS, 2012</i>)	48
	BIJLAGE 2: UITVOERIGE THEORETISCHE VERDIEPING.....	49
	BIJLAGE 3: AANDACHTSPUNTEN BIJ PROBLEEMOPLOSSEN (<i>HELDEN ET AL., 2011</i>).....	65
	BIJLAGE 4: LEERSTOFANALYSE HOOFDSTUK 8 <i>OPPERVLAKTE</i> (MODERNE WISKUNDE 2B VWO 10 ^e EDITIE)	66
	BIJLAGE 5: LESFORMULIEREN EN ONTWORPEN OPGAVENBLADEN	91
	BIJLAGE 6: INGEVULDE ONDERZOEKSINSTRUMENTEN	124
	<i>Bijlage 6.1: Ingevulde schema's bij de video-analyse</i>	<i>124</i>
	<i>Bijlage 6.2: Ingevulde observatieformulieren (de interactie tijdens centrale momenten).....</i>	<i>139</i>
	<i>Bijlage 6.3: Ingevulde analyseschema's van de opgavenbladen.....</i>	<i>162</i>
	<i>Bijlage 6.4: Resultaten van de vragenlijst</i>	<i>172</i>
	<i>Bijlage 6.5: Resultaten van het interview.....</i>	<i>177</i>
	<i>Bijlage 6.6: Resultaten van de proefwerkanalyse</i>	<i>181</i>
	BIJLAGE 7: BEOORDELINGSFORMULIER ONDERZOEKSPLAN	184

3 Samenvatting

Leerlingen verschillen in hun voorkeuren hoe ze in de wiskundeles willen werken en leren. Niet iedere leerling wil alles hapklaar gepresenteerd krijgen zonder uitgedaagd te worden om een achterliggend idee te ontdekken. Het zelf ontdekken van wetmatigheden is bij wiskunde van belang voor het opbouwen van 'rijke betekenisvolle schema's'. Tevens is het nagenoeg universeel aanvaard dat het leren van wiskunde een constructief proces is. Dit pleit voor constructivistisch, zelfontdekkend wiskundeonderwijs. Daarvoor bestaat het 6E-model (Windels, 2012). Het staat namelijk voor zelfontdekkend wiskundeonderwijs met sterke docentsturing. Constructivistische uitgangspunten en sterke sturing vanuit de docent worden samengevoegd. Door de fasering in leerstappen in het model wordt de sturende docent verplicht het constructivistisch leren na te streven.

In dit onderzoek is een lessenserie ontwikkeld en uitgevoerd bij het onderwerp *Oppervlakte* voor 2vwo van de methode *Moderne Wiskunde*, die op het 6E-model gebaseerd is. Dit allemaal om na te gaan of het 6E-model een werkwijze is die de onderzoeker vaker wil gaan toepassen. Daarvoor is verschillende (wiskunde)didactische literatuur, die aan het model te koppelen is, bestudeerd en een theoretisch kader is geschreven. Het artikel van Windels (2012) over het 6E-model was het vertrekpunt. Daaraan zijn andere wiskundendidactische theorieën opgehangen. Dit resulteerde in ontwerpeisen en mogelijkheden die de literatuur geeft voor de lessen en het lesmateriaal. In dit verslag zijn die per fase weergegeven. Daarna is de leerstof van het onderwerp *Oppervlakte* uit het boek van *Moderne Wiskunde* geanalyseerd. Dit heeft allemaal geleid tot weloverwogen keuzes voor de ontworpen lessenserie.

De onderzoeksvraag die leidend is geweest in dit onderzoek is: In hoeverre lukt het om het onderwerp *Oppervlakte* van klas V2A op het Udens College vorm te geven met het 6E-model en uit te voeren?

De kern van de deelvragen betreft: In hoeverre lopen de lessen zoals gepland? Hoe verlopen de lesonderdelen waarin zelf ontworpen materialen met betrekking tot fase E2 t/m E5 worden ingezet? In hoeverre worden over de hele lessenserie effecten zichtbaar?

In dit onderzoek is het met name om de kwaliteit van het ontwikkelde materiaal en de ontwikkelde lessen gegaan en hoe dit te koppelen is aan de theoretische achtergronden. Het betreft geen onderzoek met resultaatmeting via een controlegroep, aangezien de omvang van dit praktijkonderzoek beperkt is en het vergelijken van resultaten daardoor nauwelijks tot verantwoorde uitspraken leidt. Beantwoording van de deelvragen heeft plaatsgevonden via de resultaten die voortvloeien uit de video-opnames, de analyse van het ingevulde ontwikkelde materiaal, via de resultaten uit het bevragen van leerlingen en ten slotte via een proefwerkanalyse. Deze omvangrijke resultaten hebben geleid tot een rijk en compleet beeld van de uitgevoerde lessenserie, waarmee de onderzoeksvragen zijn beantwoord.

Er is geconcludeerd dat het lukt om de basisparagrafen van het hoofdstuk *Oppervlakte* bij klas V2A op het Udens College uit te voeren met het 6E-model. In iedere les hebben de leerlingen een nieuwe formule (wetmatigheid) ontdekt aan de hand van voorbeelden (abstraheren), vervolgens hebben zij deze zelf verwoord, en toegepast in opgaven van verschillend niveau. Tekortkomingen zijn naar voren gekomen, waarbij vooral aanpassingen moeten worden gedaan in het lesmateriaal voor het exploreren in de les van de oppervlakte van een cirkel. Dit moet opnieuw worden onderzocht. Voor de andere lessen geldt dat het 6E-model zonder twijfel toepasbaar is en succesvolle lessen uit te voeren zijn wanneer de verbeteringen worden doorgevoerd. Die verbeteringen betreffen onder andere het aanbrengen van meer sturing via gesloten vragen, en het aanpassen van de gegeven voorbeelden.

De discussiepunten die voortkomen uit het onderzoek sluiten dit onderzoeksverslag af.

Een presentatie van dit onderzoek vindt op 14 juni 2016 plaats op het Udens College sector VMBO tijdens een presentatiemiddag van de verschillende onderzoeken die binnen de school hebben plaatsgevonden.

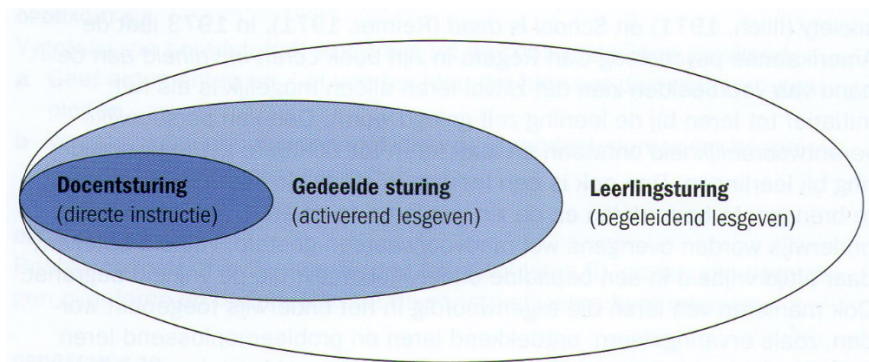
4 Probleemverkenning

4.1 Aanleiding, context en probleemverkenning

Voor mijn lio-stage op het Udens College geef ik les aan een havo2-klas en een vwo2-klas. In de beginfase van mijn stage op het Udens College kwam een leerling met de volgende vraag: "meneer, moet je altijd opletten als u iets uitlegt? Ik werk dan namelijk liever zelf aan mijn huiswerk en vind dat we in de les daar weinig tijd voor krijgen." Ik gaf hem gelijk. In mijn lessen ben ik veel aan het woord. Ik haal wat voorkennis op, geef instructie, check of deze is begrepen via het stellen van vragen en/of het maken van een oefensom, en daarna kunnen leerlingen aan het werk. Deze lesopzet kent veel onderdelen van het directe instructiemodel. Die is vooral goed in te zetten voor het aanleren van basisinformatie en basisvaardigheden. Wiskunde bestaat echter uit meer. En bij veel herhaling van directe instructie wordt het onderwijs ook erg koel en gestuurd (Ebbens & Ettekovén, 2009). Bij 'koel onderwijs' ontbreekt in mijn ogen een gevarieerde leeromgeving waarin leerlingen worden geactiveerd om zelf bezig te gaan met de leerstof en waarin ze eigen keuzes kunnen maken.

Achter het veel aan het woord zijn, schuilt dat ik als docent graag een sturende rol heb. Ik wil controle hebben op het leerproces. Maar ik wil daarbij ook graag tegemoetkomen aan de leerstijlen en behoeften van mijn leerlingen: sommige leerlingen ontdekken liever zelf, gaan liever eerst aan de slag, voordat ze het achterliggende idee achterhalen of aangereikt krijgen. Veel naar de docent luisteren en alles voorgekauwd aangegeven krijgen is voor hun niet uitdagend. Dit heeft een nadelig effect op de motivatie.

Deze wens naar een gevarieerde en uitdagende leeromgeving, een kenmerk van constructivistische leerprincipes (Veen & Wal, 2012), herkende ik dus ook bij mezelf. Deze constructivistische leerprincipes zien de leerling als actief persoon. De leeromgeving kent dan diverse vormen van samenwerkend leren, en de leraar is in staat om gerichte relevante voorkennis te activeren. Leerlingen krijgen daarbij opdrachten aangereikt die hen aanzetten om de leerstof actief te begrijpen, te integreren en toe te passen (Veen & Wal, 2012). De leerling behoort volgens sommige aanhangers van het constructivisme ook te leren zelfregulerend te leren: van docentgestuurd onderwijs (directe instructie), naar gedeelde sturing, naar leerlinggestuurd onderwijs.

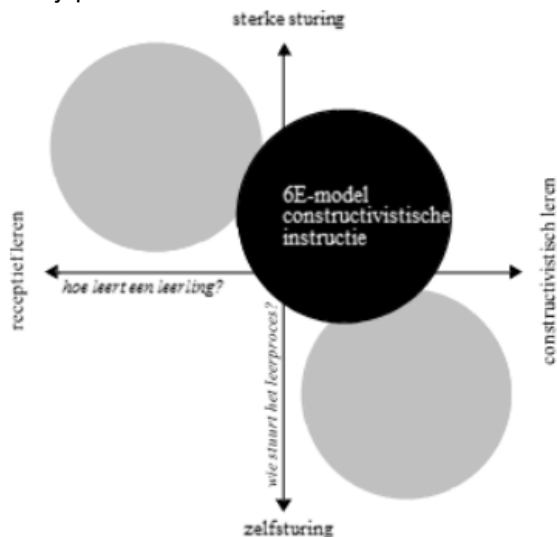


Figuur 1: Drie onderwijs-leervariaties (Veen & Wal, 2012, p.154)

Ik wilde in mijn lessen dus een stap zetten naar constructivistisch onderwijs. Die stap naar constructivistisch onderwijs moest wel aan bepaalde eisen voldoen. Onderzoek laat namelijk zien dat er effectiever wordt geleerd wanneer leraren hun studenten voorzien van een duidelijke, expliciete instructie dan hen slechts te assisteren bij het zelf ontdekken van kennis (Kirschner, Clark & Sweller, 2012). Deze conclusie is gebaseerd op een overzicht van 70 studies die gebundeld aantonen dat deze tweede vorm van instructie de kloof tussen bekwame en onbekwame leerling groter maakt: het zorgt ervoor dat de sterken sterker worden en de zwakken zwak blijven. Vanuit dit perspectief moet leerlinggestuurd onderwijs dus niet worden nagestreefd. De expliciete instructie houdt in dat leraren uitleggen welke concepten en vaardigheden de leerlingen dienen te leren. Dat kan bijvoorbeeld in de vorm van hoorcolleges, video's, computerpresentaties, realistische demonstraties, of discussies en

activiteiten in de klas, waarbij de leraar ervoor zorgt dat de relevante informatie uitdrukkelijk aan bod komt en wordt geoefend.

Het voorgaande schetst een tegenstelling. Toch bestaat er een instructietheorie die bovenstaande elementen juist verbindt, het 6E-model van Windels (2012). Het staat namelijk voor zelfontdekkend wiskundeonderwijs met sterke docentsturing (Windels, 2012). Het geeft dus invulling aan constructivistische uitgangspunten, maar combineert dit met sturing vanuit de docent, wat uit het voorgaande effectiever lijkt te zijn. Ik was benieuwd naar de rol die het 6E-model in dit praktijkprobleem kan invullen als instructiemodel.



Figuur 2: De positie van het 6E-model binnen de constructiedimensie en de sturingsdimensie (Windels, 2012)

Dit onderzoeksonderwerp sluit aan op het landelijke actuele thema 'wiskundige denkactiviteiten', waarbij het denken van de leerlingen centraal staat. Deze wiskundige denkactiviteiten gaan in het nieuwe examenprogramma voor havo en vwo een grotere rol spelen. Daarvoor moeten leerlingen meer worden gestimuleerd om probleemoplossende vaardigheden te ontwikkelen en leerstof te ontdekken. Daar kan in de onderbouw al mee worden begonnen. Binnen het 6E-model worden leerlingen meer zelf aan het denken gezet om hun wiskunde kennis zelf op te bouwen. Mijn SPD is dan ook geïnteresseerd in wat mijn onderzoek de wiskundesectie gaat opleveren. In een gesprek wat ik met haar aan ben gegaan over zelfontdekkend leren in de wiskundeles, gaf zij aan dat ze het lastig vindt om bij deze vorm van leren als docent controle te houden op de leeropbrengst van iedere leerling: zwakke leerlingen zelfontdekkend tot een leeropbrengst laten komen is in de praktijk moeilijk. Het onderzoeksonderwerp sluit binnen de school ook aan op de aandacht voor vernieuwingen omtrent activerende didactiek, zelfstandig leren en het op verschillende manieren aanbieden van leerstof.

Ik heb het 6E-model toegepast bij het hoofdstuk *Oppervlakte* van de methode *Moderne Wiskunde* (10^e editie). Mijn doel was om na te gaan of het 6E-model een werkwijze is die ik (en mogelijk mijn collega's) vaker wil gaan toepassen. Daarvoor heb ik een lessenserie gemaakt bij dit hoofdstuk, die aansluit op het 6E-model. Dit vormt de basis van mijn onderzoek.

4.2 Theoretisch kader

In dit gedeelte van het onderzoeksverslag worden theoretische achtergronden omschreven voor het ontwerpen van een lessenserie, die aansluiten op het 6E-model. Daarbij wordt het artikel van Windels (2012) over het 6E-model als uitgangspunt genomen. Dit fungeert als kapstok en als vertrekpunt. Ook wordt de relatie met verschillende wiskundendidactische theorieën gelegd. In verband met een gewenste beperkte omvang van het theoretisch kader is die uitvoerige theoretische verkenning in een bijlage opgenomen. Dit theoretisch kader wordt afgesloten met een paragraaf die dient als samenvatting van het geheel. Daarbij worden eisen en mogelijkheden voor het ontwerp op een rij gezet.

4.2.1 Het 6E-model

Het 6E-model is een instructiemodel om effectief en motiverend wiskundeonderwijs te realiseren. Het staat voor zelfontdekkend wiskundeonderwijs met sterke docentsturing. Het valt onder wat men constructivistische instructie noemt en houdt vast aan de volgende fundamenteën (Windels, 2012):

- 1 Wiskunde leren gebeurt constructivistisch, met ruime aandacht voor het onderzoeksproces
- 2 Wiskunde leren wordt door de docent sterk gestuurd
- 3 Realistische contexten worden als motivatie verhogend element gebruikt, maar de inhoud wordt contextvrij geformuleerd en worden deels contextvrij ingeoeft.

Het laatste punt, motiveren via realistische contexten, wat door Windels ook wel engageren wordt genoemd, maakt de activiteit betekenisvol, en tevens verhogen realistische contexten het leerlingenwelbevinden. Contextvrij repetitief inoefenen van vaardigheden is noodzakelijk, aangezien het werkgeheugen van de leerling niet uitgerust is om efficiënt in een probleem gebaseerde context te redeneren. Daarnaast zorgt intensief gebruik van het werkgeheugen ervoor dat kennis moeilijker wordt vastgezet in het langetermijngeheugen. De werking van het geheugen wordt in de uitvoerige theoretische verkenning toegelicht, net als het onderwerp onderzoekend leren, wat verbonden is met het 6E-model: de constructivistische instructie omvat de combinatie van aandacht voor abstracte leerinhouden en voor onderzoekscompetenties (Windels, 2012).

Het 6E-model wordt gebruikt om één nieuw begrip of één nieuwe eigenschap te leren wat gebeurt via zes leerstappen. Dat betekent dat deze zes stappen in een les soms verschillende malen worden doorlopen. Afhankelijk van het onderwerp en de didactische keuze van de docent neemt iedere leerstap tussen één en tien minuten in beslag (Windels, 2012). Het is overigens niet nodig telkens de zes leerstappen allemaal te doorlopen. De ervaren docent kan namelijk naar eigen inzicht zinvol afwijken.

De volgende stappen worden doorlopen (zie ook bijlage 1: *de overzichtskaart van het 6E-model*, met de beschrijving van de leerstappen, de acties van de docent en de acties van de leerlingen):

1. Leerstap E1: *Evalueren van de begincompetentie*. Voorkennis wordt opgefrist en waar nodig geremedieerd.
2. Leerstap E2: *Engageren*. Deze leerstap zorgt voor het wekken van interesse en motivatie voor de les, bijvoorbeeld doordat de docent een uitdagende probleemstelling voorlegt, het onderwerp kadert binnen een groter lesstofgeheel, de leerstof in historische context plaatst of een boeiende demonstratie geeft.
3. Leerstap E3: *Exploreren*. Nieuwe begrippen, concepten of eigenschappen worden aan de hand van concrete voorbeelden onderzocht of ontdekt. De docent stelt hierbij voornamelijk gesloten vragen. De docent is indien nodig zeer sturend of eerder coachend. Hij zet aan tot coöperatief leren. Hij voert eventueel zinnige terminologie in.
4. Leerstap E4: *Empirische kennis toepassen*. De leerlingen passen hun verworven informele kennis van de voorgaande leerstappen toe in eenvoudige contextvrije opgaven.
5. Leerstap E5: *Expliciteren*. De leerlingen verwoorden concepten en eigenschappen, en onder leiding van de docent wordt dit geformaliseerd.

6. Leerstap E6: *Eindcompetenties consolideren*. De nieuwe kennis en vaardigheden worden ingeoefend en de leerlingen evalueren hun eigen leerwinst.

Binnen deze leerstappen is een diversiteit aan werkvormen mogelijk. Windels (2012) geeft wat alternatieven naast het onderwijsleergesprek: spelvormen in leerstap E1, opzoekwerk in leerstap E2, begeleid zelfstandig leren in leerstap E3, zelfstandig werk in leerstap E4, peerinstructie in leerstap E5, en groepswerk in leerstap E6. Doceren kan, met name bij het expliciteren, bijna niet, want dat ondermijnt het constructivistisch leren. Verder onderstreept Windels (2012) het gevaar van het te gedetailleerd uitwerken van de zes fasen, met een ongewenste vertraging van het lestempo als gevolg.

4.2.2 De fasen van het 6E-model nader bekeken

In deze paragraaf is het 6E-model verder gedetailleerd doordat relaties zijn gelegd met andere wiskundendidactische theorie. Deze paragraaf dient als samenvatting van zowel het voorgaande over het 6E-model als de uitgebreide theoretische verdieping (bijlage 2). De verwijzingen naar literatuur in die bijlage zijn opgenomen in de algemene literatuurlijst. Het is een overzicht van de ontwerpeisen en mogelijkheden die de literatuur geeft voor mijn lessen en lesmateriaal. Deze zijn per fase van het 6E-model aangegeven.

Leerstep E1: Evalueren van de begincompetenties

- (Interactief) voorkennis opfrissen/activeren en remediëren.
 - De leerlingen krijgen het vertrouwen dat ze het kunnen, wat nodig kan zijn om aan E2 te beginnen. Wanneer de leerling ziet waar het nieuwe probleem bij aansluit, dan wil hij daar gemakkelijker mee aan de slag
 - De docent geeft aan welke oude wiskunde relevant is
 - Of je zoekt dit in een onderwijsleergesprek met de klas uit
 - Of je geeft het als individuele opdracht
- Misconstructies corrigeren
- Voorkennis van leerlingen kan verschillen. Mogelijk hierin differentiëren
- Mogelijke inzet van spelvormen

Leerstep E2: Engageren

- Uitdagende probleemstelling of boeiend instapprobleem:
 - Uitnodigend probleem waarmee leerlingen zich kunnen identificeren: het wordt hun probleem. Leerlingen worden geactiveerd en gemotiveerd, en tonen interesse
 - Probleem is (uiteindelijk) oplosbaar, maar wel uitdagend in moeilijkheid
 - De docent doordenkt vooraf de stappen die vermoedelijk gezet gaan worden en bedenkt daarbij hulpvragen
 - Het probleem is een goede oriëntatie op de leerstof. Het geeft een aanzet tot de volgende wiskundestof
 - Context uit de werkelijkheid om de wiskundeles te verlevendigen:
 - De context is herkenbaar
 - De context is te vertalen naar wiskunde
 - De wiskundeopgaven zijn uit te spreken in contexttaal
 - De context is bruikbaar door de hele stof
 - Met de leerlingen kan een gesprekje aangegaan worden over de context van een eerste probleem
 - Denk aan een opgave naar voren schuiven, een opgave met verschillende aanpakken en verschillende antwoorden, deelvragen weglaten, gegevens weglaten of toevoegen, voorspelling/schatting vragen, cognitief conflict of opgave die twijfel zaaien in de klas (discussie), omkeervraag, kaartjes categoriseren
 - Open probleem
 - Verrassingselement
- Boeiende demonstratie
- Onderwerp plaatsen in een groter lesstofgeheel
- Leerstof plaatsen in historische context
- Een prikkelende vraag stellen
- Vertellen van een verhaal
- Bij meetkunde: gebruik concreet materiaal als startpunt en als steun onderweg, als model voor andere begrippen
- Mogelijke inzet van opzoekwerk

Leerstep E3: Exploreren

- De docent geeft concrete voorbeelden: voorbeelden en non-voorbeelden. De leerlingen ontdekken hier wetmatigheden of verbanden in, waardoor uiteindelijk abstractie plaatsvindt:
 - Non-voorbeelden lijken op voorbeelden maar zijn het net niet
 - Veel non-voorbeelden geven
 - Voldoende voorbeelden geven
 - Voldoende variatie
 - Voorbeelden van de leerling
 - Extreme voorbeelden
 - Praktische voorbeelden
- Bij meetkunde: gebruik concreet materiaal als startpunt en als steun onderweg, als model voor andere begrippen
- De leerlingen maken gebruik van hun voorkennis om nieuwe begrippen, concepten of eigenschappen te ontdekken
- De docent verbindt informeel met formeel taalgebruik en introduceert nieuwe terminologie of symbolen
 - Verkorting van concreet naar abstract: welke stappen in de schematisering mogen niet gemist worden om leerlingen tot inzicht te brengen in plaats van een onbegrepen truc?
- De docent streeft een concrete en visuele voorstelling na, eventueel in een realistische context:
 - Context uit de werkelijkheid om begrippen, concepten of eigenschappen te introduceren en te ontwikkelen:
 - De context is herkenbaar,
 - De context is te vertalen naar wiskunde,
 - De wiskundeopgaven zijn uit te spreken in contexttaal
 - De context is bruikbaar door de hele stof
- De docent stelt vooral gesloten vragen: “Is het zo dat...?”, “Hoe groot is...?”
- De docent is sturend of coachend:
 - Denktijd geven, vragen stellen, geen vingers, doorvragen, denken-delen-uitwisselen, hulp zodat de leerling wel zelf de opdracht kan afmaken en het uitdagend genoeg blijft, niet direct beschikbaar zijn, leerlingen helpen met reflecteren en monitoren:
 - “Waar ben je mee bezig?”
 - “Waar wil je naar toe?”
 - “Klopt wat je nu gevonden hebt met de gegevens?”
 - “Waarom wil je dit nu ook al weer weten?”
- De docent stimuleert coöperatief/samenwerkend leren:
 - Inzet van goed gestructureerde samenwerkingsopdrachten
 - Drietallen
 - Leerlingen eerst zelf groepjes laten maken
 - Keuze voor samenwerken toelichten en verwachtingen uitspreken
 - Aangepaste hulp bieden bij het oplossen van problemen: vragen stellen en hints geven tot het groepje weer verder kan, of juist op afstand blijven
 - Wel of niet geven van materiaal dat het oplossen vergemakkelijkt
 - Eventueel extra werk voor groepjes die snel klaar zijn
 - Laat groepjes hints voor anderen bedenken
 - Laat snelle groepjes elkaars werk uitwisselen, becommentariëren en eventueel beoordelen
- De leerlingen voeren een positieve interactie
- Mogelijke inzet van begeleid zelfstandig leren

Leerstep E4: Empirische kennis toepassen

- De docent stelt vragen die leerlingen kunnen beantwoorden op basis van de opgedane intuïtieve ervaringskennis
- De docent stelt halfopen vragen
- De leerlingen passen de ontdekte wetmatigheden en verbanden intuïtief toe op eenvoudige contextvrije opgaven zonder dat ze al een formele regel hebben geleerd
- Bij meetkunde: gebruik concreet materiaal als startpunt en als steun onderweg, als model voor andere begrippen
- De leerlingen geven nieuwe voorbeelden of nieuwe toepassingen
 - De leerling komt zo tot abstractie
- Mogelijke inzet van zelfstandig werk

Leerstep E5: Expliciteren

- Doceren is ten strengste verboden: de docent is de inhoudelijke begeleider en coach van leer- en denkprocessen, niet de overdrager van kennis
- De docent stelt open vragen, waarmee de leerlingen de nieuwe begrippen en concepten kunnen definiëren en nieuwe eigenschappen formuleren en bewijzen
- De docent stimuleert het gebruik van formele wiskundetaal
- De leerlingen antwoorden op waarom-vragen over concrete voorbeelden en formuleren een definitie of eigenschap in hun eigen woorden
 - De docent is actief in het leiden van het gesprek en de interactie met de groep
- De leerlingen formuleren de ontdekte wetmatigheden, verbanden en structuren in formele wiskundetaal
- Mogelijke inzet van peerinstructie

Leerstep E6: Eindcompetenties consolideren

- Aangeleerde begrippen, concepten en eigenschappen worden toegepast. De nieuwe kennis en vaardigheden worden ingeoefend
- De docent kiest oefeningen en (vakoverschrijdende) toepassingen
 - Een open opgave, met verschillende aanpakken en verschillende antwoorden, deelvragen weglaten, gegevens weglaten of toevoegen, omkeervraag, kaartjes categoriseren
 - Context uit de werkelijkheid om geleerde kennis toe te passen
 - De context is herkenbaar,
 - De context is te vertalen naar wiskunde,
 - De wiskundeopgaven zijn uit te spreken in contexttaal
 - De context is bruikbaar door de hele stof
- De docent stelt zich op als coach
 - Denktijd geven, vragen stellen, geen vingers, doorvragen, hulp zodat de leerling wel zelf de opdracht kan afmaken en het uitdagend genoeg blijft, niet direct beschikbaar zijn, leerlingen helpen met reflecteren en monitoren:
 - “Waar ben je mee bezig?”
 - “Waar wil je naar toe?”
 - “Klopt wat je nu gevonden hebt met de gegevens?”
 - “Waarom wil je dit nu ook al weer weten?”
- De docent komt terug op de onopgeloste uitdagende probleemstelling uit fase E2
- De docent evalueert de leerwinst. De leerlingen evalueren hun eigen leerwinst:
 - Oefening met terugkoppeling over de juistheid van de oplossing is noodzakelijk
 - Leerlingen moeten leren reflecteren op hun eigen kennis en aanpak en zelfvertrouwen ontwikkelen
- De docent stimuleert coöperatief leren: mogelijke inzet van groepswork
 - Drietallen

- Leerlingen eerst zelf groepjes laten maken
- Keuze voor samenwerken toelichten en verwachtingen uitspreken
- Door zijn eigen oplossingsgedrag te confronteren met dat van anderen krijgt de leerling meer inzicht in de effectiviteit ervan
- Een klassikale nabespreking is belangrijk voor het vastleggen van wat is geleerd en voor het reflecteren op de opgaven. Verschillende strategieën moeten worden besproken, net als de stappen in de probleemaanpak die cruciaal zijn
- De docent differentieert
 - Aangepaste hulp bieden bij het oplossen van problemen: vragen stellen en hints geven tot het groepje weer verder kan, of juist op afstand blijven
 - Wel of niet geven van materiaal dat het oplossen vergemakkelijkt
 - Eventueel extra werk voor groepjes die snel klaar zijn
 - Laat groepjes hints voor anderen bedenken
 - Laat leerlingen zich verspreiden over andere groepjes
 - Laat snelle groepjes elkaars werk uitwisselen, becommentariëren en eventueel beoordelen
- De leerlingen vertonen zelfredzaamheid en verantwoordelijkheid voor hun eigen leerproces: zelfstandig kunnen werken is een belangrijk aspect voor de ontwikkeling van een onderzoekende houding

In paragraaf 4.3 volgt een leerstofanalyse, waarna gemaakte keuzes van ontwerpeisen die in dit onderzoek centraal staan volgen.

4.3 Leerstofanalyse

Het hoofdstuk van de lessenserie gaat grotendeels over het onderwerp oppervlakte: de oppervlakte van een driehoek, parallellogram en cirkel. Leerlingen zijn al bekend met het uitrekenen van de oppervlakte van een rechthoek. Naast oppervlakte wordt de omtrek van een cirkel ook behandeld. Omtrek en oppervlakte zijn dus twee belangrijke begrippen. Voordat er wordt ingegaan op de leerstofanalyse uit de wiskundemethode eerst iets uit vakdidactisch oogpunt over het leren van oppervlakte.

Freudenthal (1979) omschrijft het leerproces omtrent het leren van oppervlakte. Daarbij wordt een bepaalde weg bewandeld, en niet zomaar begonnen met: oppervlakte = lengte maal breedte. Het begint met het vergelijken van figuren: welke is groter? Dat kan in gevallen die niet direct op het oog te bepalen zijn met knippen en plakken van figuren. Later bij erg grillige figuren kan het via een rooster en het tellen van het aantal hokjes per figuur, waar wel de moeite voor moet worden genomen. Voor rechte lijnige begrensde of regelmatige figuren, die in hoofdstuk 8 *Oppervlakte* aan bod komen, lijkt dit echter een averechtse procedure (Freudenthal, 1979). Dan kan beter gekozen worden voor een eerlijke verdeling van het voorwerp, waarbij het voor de hand ligt om te profiteren van een meetkundige structuur van het te verdelen object. Denk bijvoorbeeld aan het verdelen van een vierkant in twee gelijke driehoeken. Het hoeft dus niet per se zo moeilijk via roosters en benaderingen. Voor rechte lijnige begrensde figuren kunnen knip-plak-procedures worden ingezet, waarmee gelijkheid en vergelijking van oppervlakte kan worden gedefinieerd (Freudenthal, 1979).

Die knip-plak-procedures komen in de opgaven van het hoofdstuk *Oppervlakte* niet aan de orde. Er wordt wel gebruik gemaakt van een meetkundige structuur van de figuren, maar een handeling waarbij moet worden geknipt en geplakt wordt overgeslagen. Verwacht wordt dat de leerling bij het plaatje in het boek een mentale voorstelling kan maken en zo gelijkheid en vergelijking van oppervlakte kan definiëren. In bijlage 4 is een analyse opgenomen van hoofdstuk 8 *Oppervlakte* uit *Moderne Wiskunde 2B vwo 10^e editie*. Deze analyse is ingeleid met de nieuwe leerdoelen die in het hoofdstuk terugkomen. Daarna zijn per paragraaf aangegeven:

- Leerdoelen
- Voorkennis
- Analyse van de opgaven
 - Wiskundige onderwerpen
 - Leerdoel waar het bij hoort
 - Type opgave: oriënteren – ontwikkelen – verwerken
 - Opmerkingen/vlaggen
 - Aansluiting bij 6E-cycli (In welke fase is de opgave te gebruiken? Moet er iets worden aangepast?)
- Suggesties en mogelijke aanvullingen uit andere bronnen
 - Leerdoel waar het bij hoort
 - Bron
 - Typering (wat voor een soort bron het betreft)
 - Wiskundige onderwerpen
 - Opmerkingen/vlaggen
 - Aansluiting bij 6E-cycli (In welke fase is de opgave te gebruiken? Moet er iets worden aangepast?)

Uit de leerstofanalyse blijkt dat het hoofdstuk veel opgaven bevat die gebruikt kunnen worden voor fase E4 (empirische kennis toepassen) en E6 (eindcompetenties consolideren). Ook zijn er opgaven die ingezet kunnen worden bij fase E2 (engageren) en E3 (exploreren). Soms moeten deze worden aangepast, bijvoorbeeld minder sturend worden gemaakt door deelvragen weg te laten of informatie niet te geven maar ernaar te vragen. Of er moeten meer voorbeelden en non-voorbeelden worden toegevoegd. Regelmatig is er de behoefte om concreet materiaal te maken dat aansluit bij de opgaven en de leerling meer activeert om de inhoud zelf te ontrafelen, bijvoorbeeld met knipbladen.

Een aantal opgaven achterin het hoofdstuk kunnen naar voren worden gehaald, omdat ze aansluiten bij een fase van het 6E-model, die in de opgaven van de basisparagraaf niet of te weinig terugkomt. Ook zijn andere bronnen bestudeerd voor het vinden van aanvullingen. Deze aanvullingen zijn in verschillende wiskundemethoden gevonden. Bepaalde opgaven daaruit kunnen worden gebruikt, bijvoorbeeld omdat ze een meer zelfontdekkend karakter hebben, of omdat ze meer aandacht geven aan specifieke wiskundige inhoud. Voor het uiteindelijke ontwerp moeten keuzes worden gemaakt in de gevonden aanvullingen. Deze zijn te omvangrijk om allemaal terug te laten komen.

Een belangrijke wens voor het ontwerp die uit de leerstofanalyse is ontstaan, betreft het in volgorde omdraaien van de basisparagrafen *Driehoeken* (§8.1) en *Parallellogrammen* (§8.2). Meerdere methodes laten op bepaalde niveaus de oppervlakte van een driehoek aansluiten op die van een parallellogram: de oppervlakte van een driehoek is de helft van die van een parallellogram, daarom $\text{basis} \times \text{hoogte} : 2$. Door deze keuze kan bij de oppervlakte van een driehoek een eenvoudige knip-plak-procedure aan bod komen waarbij de oppervlakte vanuit handelen wordt gedefinieerd. De oppervlakte van de stomphoekige driehoek wordt ook bekeken vanuit de oppervlakte van een parallellogram, waarmee de situatie dat de hoogte buiten de driehoek ligt niet zoals in het boek wordt weggegeven, maar vanuit de meetkundige structuur van het figuur wordt benaderd.

In het boek worden dus de volgende twee wegen afgelegd:

Oppervlakte rechthoek $\rightarrow$ oppervlakte driehoek

Oppervlakte rechthoek $\rightarrow$ oppervlakte parallellogram

In de lessenserie zal dit meer met elkaar in verband worden gebracht, met meer aandacht voor de meetkundige structuur van de figuren:

Oppervlakte rechthoek $\rightarrow$ oppervlakte parallellogram $\rightarrow$ oppervlakte driehoek

In de volgende paragraaf geef ik als conclusies van paragraaf 4.2 en paragraaf 4.3 ontwerpeisen en een verdere beschrijving van het ontwerp.

4.4 Ontwerp lessen en lesmateriaal

In dit onderzoek zijn 4 lessen uitgevoerd volgens de uitgangspunten van het 6E-model. Deze lessen vervangen de vier basisparagrafen uit het betreffende hoofdstuk. Dezelfde leerinhoud komt terug, maar deze wordt op een andere manier aangereikt en aangeleerd, en ook in een andere volgorde. Het boek wordt door de leerlingen niet gebruikt. Het bijgevoegde ontworpen materiaal (bijlage 5) bevat voor iedere les een lesformulier en een opgavenblad voor de leerlingen, welke op basis van ontwerpeisen en suggesties uit zowel het theoretisch kader als de leerstofanalyse zijn ontworpen. De overige bijlagen van de lesformulieren zijn niet opgenomen. Dit betreft bijvoorbeeld de voorbereiding van het bespreken van een huiswerkopgave (E1: evalueren van de begincompetenties) of concreet materiaal voor fase E2 (engageren). In de lesformulieren is de aard van het materiaal wel beschreven. Voor het uitwerken van de opgaven is ruimte gemaakt op het opgavenblad. Dit maakt de analyse van de gemaakte opgaven eenvoudiger.

De suggesties en de ontwerpeisen die leidend zijn geweest in de ontworpen lessenserie staan hieronder per fase weergegeven.

Leerstep E1: *Evalueren van de begincompetentie*

- Aandacht geven aan het huiswerk door van een aantal opgaven van de vorige les de uitwerking te presenteren. Er is geen ruimte om vragen te stellen, daar is geen tijd voor. De docent laat zien hoe de leerling het had moeten doen. Het betreft dus eigenlijk een verlenging van fase E6 van de vorige les, waarin terugkoppeling van de juistheid van de oplossing noodzakelijk is.
- De docent stelt om specifieke voorkennis op te halen “herhalingsvragen”, soms ondersteund door een afbeelding op het digibord.
- ± 5 minuten per les

Leerstep E2: *Engageren*

- De docent gaat over op nieuwe leerstof. Een afbeelding op het digibord of concreet materiaal wordt gepresenteerd en via prikkelende vragen worden de leerlingen aan het denken gezet, wordt een peiling gehouden of wordt om een idee gevraagd om zo de leerling te motiveren voor de les.
- ± 5 minuten per les

Er wordt overgegaan op het opgavenblad, waarin fase E3 t/m E6 terugkomen. Het opgavenblad wordt in heterogene drietallen gemaakt, jongens en meisjes gemixt. Het gemaakte opgavenblad van de vorige les wordt door de docent ingenomen.

Leerstep E3: *Exploreren*

- Begeleid zelfstandig leren in drietallen.
- De opdrachten voor het exploreren bevatten twee keer knip-plak-procedures, één keer de inzet van concreet materiaal, en één keer een schema met voorbeelden. Via uitwisseling in de drietallen of in de klas wordt ervoor gezorgd dat in voldoende voorbeelden wetmatigheden of verbanden worden ontdekt.
- In de begeleiding stelt de docent vooral gesloten vragen: “Is het zo dat...?”, “Hoe groot is...?”. Hij is sturend of coachend, maar zorgt er in ieder geval voor dat de leerling met de hulp de opdracht zelf kan afmaken en het uitdagend genoeg blijft.

Leerstep E4: *Empirische kennis toepassen*

- Zelfstandig werken in drietallen.
- Ieder opgaveblad bevat één of enkele eenvoudige contextvrije opgave(n), waarin de leerlingen de verworven informele kennis toepassen.

Leerstep E5: *Expliciteren*

Het expliciteren wordt gesplitst in een zelfstandig deel (E5a) en een klassikaal deel (E5b). Het expliciteren is in dit onderzoek de belangrijkste fase, waaruit bepaald kan worden of de leerling de zelf te ontdekken wetmatigheden heeft weten te formuleren.

- E5a: Het expliciteren vindt plaats via de opdracht om met de groepsleden uit te leggen hoe je de oppervlakte/omtrek van het specifieke figuur uitrekent.
- E5b: In de centrale uitwisseling richting het einde van de les kunnen verschillende antwoorden worden besproken, in ieder geval de antwoorden op de opdracht van fase E5a. Ook kan ik als docent nieuwe terminologie of afkortingen introduceren, zodat overgegaan wordt op formele wiskundetaal. Ik kan als docent doorvragen, bijvoorbeeld naar de toepassing van de formule/berekening in variërende voorbeelden, of vragen als: "Waar moet je opletten bij...?" "Waar kijk je als eerste naar?" "Waar moet je naar kijken bij het oplossen van opgaven zoals...?". Ik ben actief in het leiden van het gesprek en de interactie met de groep, doceren mag daarbij niet.
- E5b wordt soms ondersteund met afbeeldingen uit het opgavenblad op het digibord. Daar worden vragen bij gesteld.
- E5b: ± 5 minuten per les

Leerstep E6: *Eindcompetenties consolideren*

- Zelfstandig werken in drietallen.
- Leerlingen gaan aan de slag met de toepassingsvragen. De docent begeleidt en stelt zich op als coach.
- De docent differentieert: waarschijnlijk krijgen de groepjes het werkblad niet in de les af. Snelle groepjes kunnen anders elkaars werk uitwisselen. Groepjes die vastlopen krijgen aangepaste hulp: vragen stellen en hints geven tot het groepje weer verder kan.
- ± 5 minuten per les. Wat in de les niet af komt, is huiswerk. Het doel is om in iedere les minimaal tot fase E5b te komen. De leerling kan vervolgens het opgavenblad mee naar huis nemen en afmaken. De volgende les levert de leerling dit aan het begin bij de docent in.

Leerlingen werken tijdens fase E3 t/m E6, dus bij het werken aan het opgavenblad, in drietallen. Dit samenwerken in drietallen heeft eenmaal eerder plaatsgevonden in de wiskundeles. Het maken van groepjes mochten leerlingen deels zelf bepalen: van de middelste rij in de busopstelling sloot 1 leerling zich aan bij een tweetal aan een zijkant naar keuze. Lagerwerf (2000) geeft als aanbeveling: laat leerlingen bij een eerste samenwerkingsopdracht zelf groepjes maken. Een probleem in die les was dat er één meisje overbleef dat bij twee jongens moest, verder was het allemaal gesorteerd op geslacht. Deze ene leerling voelde zich benadeeld. Om dit bij deze 4 lessen te voorkomen, en om recht te doen aan de aanbeveling om bij basisstof, stof die iedere leerling moet beheersen, te werken in heterogene groepjes (Ebbens & Ettekoven, 2013) heb ik ervoor gekozen om zelf groepjes te maken, waarbij jongens en meisjes zijn gemengd en waarbij sterke en zwakke leerlingen zijn gemixt.

4.5 Onderzoeksvraag

Onderzoeksdoel:

Het doel van dit onderzoek is om na te gaan of het 6E-model een werkwijze is die ik (en mogelijk mijn collega's) vaker wil gaan toepassen.

Hoofdvraag:

In hoeverre lukt het om het onderwerp *Oppervlakte* van klas V2A op het Udens College vorm te geven met het 6E-model en uit te voeren?

Deelvragen:

- In hoeverre lopen de lessen zoals gepland?
- Hoe verlopen de lesonderdelen waarin zelf ontworpen materialen met betrekking tot fase E2 t/m E5 worden ingezet?
 - Met name:
 - o Hoe verloopt het centraal wekken van interesse via prikkelende vragen, uitdagende problemen en demonstraties van de docent (E2 *engageren*)?
 - o Hoe gaat het werken aan de opdrachten voor fase E3 *exploreren*?
 - o Hoe worden de contextloze opdrachten gemaakt waarin empirische kennis wordt toegepast (E4)?
 - o Hoe gaat het zelf verwoorden van wat ontdekt is (E5a)?
 - o Hoe gaat het centraal uitwisselen van wat de leerlingen ontdekt hebben (E5b)?
- In hoeverre worden over de hele lessenserie effecten zichtbaar m.b.t.: de prestaties van leerlingen, werken aan 'weten waarom', activeren van leerlingen en motivatie van leerlingen?

In paragraaf 5.3 worden de onderzoeksinstrumenten besproken. Deze zijn gekoppeld aan bepaalde deelvragen. De instrumenten geven aan hoe de resultaten voor het beantwoorden van de onderzoeksvragen zijn verzameld.

5 Uitvoering van het onderzoek

5.1 De onderzoeksgroep

Ik geef les op het Udens College sector HAVO/VWO aan een vwo2-klas en een havo2-klas. Het Udens College is een grote streekschool.

Met mijn vwo2-klas kan ik erg goed werken. Lessen verlopen altijd ordelijk, ook de les waarin eerder in drietallen is samengewerkt. Mijn havo2-klas is gevoeliger voor verandering en is gebaat bij veel structuur en rust in het lokaal. Deze klas vraagt om meer handelen op het gebied van klassenmanagement wat voor een deel ten koste gaat van tijd die ik kan steken in vakinhoudelijk en vakdidactisch handelen. Vanuit dit perspectief heb ik ervoor gekozen de lessenserie uit te voeren en te onderzoeken in mijn vwo2-klas (V2A).

Klas V2A bestaat uit 28 leerlingen: 14 jongens en 14 meisjes. Het niveauverschil in de klas loopt wel uiteen, maar het kenmerkt zich vooral door een grote middengroep: een paar leerlingen zijn beduidend zwakker dan de middengroep en een klein aantal is te bestempelen als sterke leerling. Aangezien de leerlingen werken in vaste drietallen, maar het 28 leerlingen betreft, is ervoor gekozen om twee tweetallen aan te houden. Voor de uitvoering van de opdrachten betekende dit met name dat ik als docent in de begeleiding aangaf welk gedeelte van het exploreren (E3) mocht worden overgeslagen. Dit houdt in dat de leerlingen nieuwe begrippen, concepten of eigenschappen ontdekken aan de hand van een beperkter aantal voorbeelden. De groepjes, in ieder geval de drietallen, bestonden uit jongens en meisjes en sterke en zwakke leerlingen zijn gemixt. Bij één tweetal is ervoor gekozen om twee leerlingen van hetzelfde geslacht bij elkaar te zetten. De tweetallen bestonden niet uit twee sterke of twee zwakke leerlingen, maar betroffen twee leerlingen uit de middengroep.

5.2 Onderzoeksmethode

Mijn onderzoek betreft een wiskundendidactisch praktijkonderzoek. In mijn onderzoek gaat het vooral om de kwaliteit van het ontwikkelde materiaal: kan de docent en kunnen de leerlingen hiermee uit de voeten? Hoe ervaren zij dit? Hoe zijn de ervaringen te koppelen aan de theoretische achtergronden? Het betreft geen onderzoek met resultaatmeting via een controlegroep, aangezien de omvang van mijn praktijkonderzoek beperkt is en het vergelijken van resultaten daardoor nauwelijks tot verantwoorde uitspraken zal leiden. Effecten die worden besproken, worden dus niet geanalyseerd a.d.h.v. resultaten van een controlegroep. Beantwoording van de laatste deelvraag vindt plaats met het verzamelen van de ervaringen van de leerlingen en een proefwerkanalyse.

Er wordt aanbevolen om data te verzamelen uit meerdere gegevensbronnen met meerdere instrumenten. Dit wordt ook wel triangulatie genoemd (Boogaarts & Konings, 2015). De onderzoeksmethoden die ik zal gebruiken, zijn:

1. Observeren via video
2. Observeren via observatieformulier (lesobservatie naar de leraar-leerling interactie in centrale lesmomenten)
3. Bestuderen van ingevulde opgavenbaden (opgavenbladen analyseren)
4. Bevrage via vragenlijst (schriftelijk invullen per leerling)
5. Bevrage via Interview (gesprekken met individuele leerlingen)
6. Bestuderen van proefwerken (toetsen analyseren)

Bij het analyseren van het proefwerk is vooral naar de inhoud van het proefwerk gekeken, niet naar het toetscijfer. Immers wordt een toetscijfer door heel veel factoren beïnvloed en kun je daardoor geen sterke conclusies trekken door alleen naar het cijfer te kijken (Boogaart & Konings, 2015). Naast de vragenlijst is er gekozen voor een interview, aangezien dit tot meer kwalitatieve informatie zal leiden: er is meer ruimte voor verdieping, waardoor de informatie meer betrouwbaar en betekenisvoller is. Tevens kan het zo zijn dat leerlingen bij het invullen van vragenlijsten sociaal wenselijk gedrag vertonen en niet helemaal eerlijk zijn. Door daarnaast met individuele leerlingen een interview te houden, breng je beter in kaart wat ze werkelijk vinden (Donk & Lanen, 2012).

5.3 Instrumenten

5.3.1 Video

Tijdens de vier lessen die volgens het 6E-model zijn uitgevoerd, heeft er een camera in het lokaal gestaan. Deze camera stond achterin het lokaal, vanuit een vast punt gericht naar het bord, waarmee mijn handelen is vastgelegd, en een deel van de leerlingen viel binnen het beeld. De opnamen van de lessen zijn achteraf teruggekeken, en daarmee is (deels) een antwoord te geven op de volgende deelvragen:

- In hoeverre lopen de lessen zoals gepland?
- Hoe verlopen de lesonderdelen waarin zelf ontworpen materialen worden ingezet?

Bij het terugkijken van de les is een schema ingevuld, die enerzijds iets zegt over het globale lesverloop: verloopt de les qua tijdsverdeling zoals gepland? Welke onderdelen kosten meer tijd dan gepland? Welke onderdelen kosten minder tijd dan gepland? Lukt het om in iedere les fase E5b af te ronden? Daarnaast zijn zaken genoteerd die iets zeggen over de kwaliteit van de betreffende 6E-fase en het bijbehorende lesmateriaal. Acties van de docent en de leerling zijn omschreven. Om een compleet beeld van een specifieke fase en daarmee van de les te geven, is er voor gekozen om bij de acties van de leerlingen ook samengevat iets te zeggen over de resultaten uit de analyse van de opgavenbladen. De overzichtskaart (bijlage 1) is ernaast gehouden en daarmee wordt per les per fase aangegeven of dit onvoldoende, voldoende of goed is. Dit is bij de verwerking weergegeven via het geven van een kleur (rood-oranje-groen) aan iedere fase, waarmee direct een visueel en overzichtelijk beeld wordt gegeven van de kwaliteit van die les.

De ingevulde schema's van het analyseren van de lessen via de opname zijn opgenomen in bijlage 6.1.

5.3.2 Lesobservatie

Tijdens de vier lessen die volgens het 6E-model zijn uitgevoerd, heeft een observant in het lokaal gezeten. Deze observant had als observatiedoel om de inhoudelijke interactie tussen leraar en leerling in centrale lesmomenten vast te leggen: Welke vragen stelt de docent? Welke antwoorden worden gegeven? Dit is vastgelegd voor fase E1, E2 en E5 middels een observatieformulier. Deze observant diende als back-up voor het geval dat de interactie op de video slecht te volgen was. Dit was achteraf in geen video-opname het geval, waardoor het observatieformulier grotendeels is ingevuld via het terugkijken van de video. Hiermee kan antwoord worden gegeven op de volgende deelvragen:

- Hoe verloopt het centraal wekken van interesse via prikkelende vragen, uitdagende problemen en demonstraties van de docent (E2 *engageren*)?
- Hoe gaat het centraal uitwisselen van wat de leerlingen ontdekt hebben (E5b)?

Bij het verwerken en analyseren van de observatieformulieren zijn de vragen die de docent stelt gecategoriseerd naar type vraag: weten dat, weten hoe, weten waarom. Daarmee kan iets worden gezegd over de mate waarin de docent de leerling aan het denken zet. De ingevulde observatieformulieren zijn bijgevoegd in bijlage 6.2.

5.3.3 Analyse van ingevulde opgavenbladen

Aan het begin van iedere les, na fase E2, heeft de docent de ingevulde opgavenbladen van de vorige les ingenomen. Op deze opgavenbladen zijn de opdrachten uitgewerkt. Via een analyse van de uitwerkingen is antwoord gegeven op de volgende deelvragen:

- Hoe verlopen de lesonderdelen waarin zelf ontworpen materialen worden ingezet?
- Hoe gaat het werken aan de opdrachten voor fase E3 *exploreren*?
- Hoe worden de contextloze opdrachten gemaakt waarin empirische kennis wordt

- toegepast (E4)?
- Hoe gaat het zelf verwoorden van wat ontdekt is (E5a)?

De opgaven die gekoppeld zijn aan fase E3 t/m E6 zijn geanalyseerd via een schema. De nadruk lag daarbij op het verwoorden van het geleerde door de leerlingen (fase E5a). Daarom zijn van de lessen waarin de leerlingen de opgaven van fase E5a vóór de klassikale uitwisseling hebben gemaakt die opgaven van de hele klas geanalyseerd. Verder is per les van 6 leerlingen het ingevulde werk bekeken: twee zwakke leerlingen, twee leerlingen uit de 'middengroep' en twee sterke leerlingen. Deze leerlingen zaten niet bij elkaar in het groepje. Er is gekeken naar of de opgave goed, fout, of niet gemaakt is en opvallendheden (bijv. misconcepties) zijn meegenomen. In bijlage 6.3 is het analyseschema per les opgenomen.

5.3.4 Vragenlijst

Na de vier lessen die volgens het 6E-model zijn uitgevoerd hebben de leerlingen een vragenlijst ingevuld op de computer, die uit 34 stellingen bestond en naar de beleving van de leerlingen vroeg. Het betrof een schaalvraag: leerlingen konden antwoorden van helemaal mee oneens tot helemaal mee eens. De antwoorden op de vragenlijst zijn gebruikt om antwoord te geven op de volgende deelvraag:

- In hoeverre worden over de hele lessenserie effecten zichtbaar m.b.t.: de prestaties van leerlingen, werken aan 'weten waarom', activeren van leerlingen en motivatie van leerlingen?

In bijlage 6.4 zijn de resultaten van de vragenlijst opgenomen. Daarbij is gekozen om de resultaten weer te geven in een gestapelde staafdiagram, waarmee de verdeling van de antwoorden op de vragen te vergelijken valt.

5.3.5 Interview

Na de vier lessen die volgens het 6E-model zijn uitgevoerd, is met drie leerlingen een individueel gesprek gevoerd over de lessenserie: leerlingen uit verschillende groepjes zijn bevraagd van verschillend niveau (zwak, 'middengroep' en sterk). Van ieder interview is een geluidsopname gemaakt. De resultaten van deze interviews zijn gebruikt om antwoord te geven op de volgende deelvragen:

- Hoe verlopen de lesonderdelen waarin zelf ontworpen materialen worden ingezet?
- In hoeverre worden over de hele lessenserie effecten zichtbaar m.b.t.: de prestaties van leerlingen, werken aan 'weten waarom', activeren van leerlingen en motivatie van leerlingen?

Dit interview bood de gelegenheid om ervaringen van leerlingen rijker te omschrijven. Er bestond de mogelijkheid tot doorvragen, waardoor verdieping ontstaat. Bijlage 6.5 betreft de resultaten van het interview.

5.3.6 Proefwerkanalyse

Hoofdstuk 8 is getoetst in een proefwerk. Hoofdstuk 8 werd samen met hoofdstuk 7 getoetst in de vierde toetsweek (14 t/m 19 april 2016). Met een analyse van het proefwerk kan (deels) antwoord worden gegeven op de volgende deelvraag:

- In hoeverre worden over de hele lessenserie effecten zichtbaar m.b.t.: de prestaties van leerlingen, werken aan 'weten waarom', activeren van leerlingen en motivatie van leerlingen?

De analyse van het proefwerk is via een overzicht in Excel gemaakt. Daarbij zijn de behaalde punten van iedere leerling per opgave ingevuld, waarmee een overzicht is gemaakt bij welke opgaven de klas veel punten heeft laten liggen en bij welke opgave veel punten zijn behaald. Daarna is gekeken naar

de gemaakte uitwerkingen van die opgave: welke misconcepties zijn er te vinden? Het proefwerk is negen dagen na de laatste onderzoeksles gemaakt. Daar hebben 4 wiskundelessen tussen gezeten, waarin hoofdstuk 8 ook is herhaald. In bijlage 6.6 is een overzicht in Excel van de resultaten van het proefwerk toegevoegd. Ook is een schema bijgevoegd waarmee de opgaven die bij hoofdstuk 8 hoorde zijn geanalyseerd.

6 Onderzoeksresultaten

Hieronder zijn de onderzoeksresultaten weergegeven. Eerst is in een tabel een overzicht van de vier 6E-lessen gegeven, waarbij docent- en leerlingactiviteiten zijn gescheiden. Daarbij is voor zowel de docent als de leerling met kleuren de kwaliteit van een fase beoordeeld door het lesverloop te vergelijken met de suggesties uit de overzichtskaart van het 6E-model: groen betekent dat er aan de suggesties is voldaan, oranje betekent deels voldaan, en rood betekent niet voldaan. Zwart geeft aan dat de betreffende fase niet heeft plaatsgevonden. Om tot een kleurtoekenning te komen, is gekeken naar de resultaten van de video-analyse, de observatie van de interactie tijdens centrale momenten en de analyse van opgavenbladen. Het werken aan de opgavenbladen behoort namelijk ook tot de leerlingactiviteiten bij fase E3 t/m E6, en daarom is dit meegenomen. Deze drie instrumenten zijn dus direct verbonden met de lesactiviteiten en lopen daardoor in elkaar over. Voor de eerste twee lessen is deze toekenning van kleuren al uitgebreid toegelicht in bijlage 6.1. In het vervolg van dit hoofdstuk, bij de analyse per les, komt dit voor alle lessen nog kernachtig ter sprake. Daarmee worden de resultaten voor de eerste deelvraag *In hoeverre verlopen de lessen zoals gepland?* weergegeven. De resultaten voor de tweede deelvraag *Hoe verlopen de lesonderdelen waarin zelf ontworpen materialen met betrekking tot fase E2 t/m E5 worden ingezet?* en de bijbehorende 'subdeelvragen' zijn vervolgens nog explicieter weergegeven bij een analyse per specifieke 6E-fase. Daar zijn soms aanvullingen bij geplaatst die voortkomen uit de andere drie instrumenten, te weten de vragenlijst, het interview en de proefwerkanalyse

Van de resultaten van de vragenlijst en het interview wordt daarna gezamenlijk een beeld gegeven, met name van resultaten die nog niet aan bod zijn geweest. De proefwerkanalyse volgt daar nog op. Dit helpt enerzijds bij het beantwoorden van de deelvraag *In hoeverre worden over de hele lessenserie effecten zichtbaar m.b.t.: de prestaties van leerlingen, werken aan 'weten waarom', activeren van leerlingen en motivatie van leerlingen?* en anderzijds geven zij een nog rijker beeld van het verloop van de 6E-lessen.

6.1 Overzicht van de 6E-lessen

Les 1 Parallellogrammen	E1	E2	E3	E4	E5a	E5b	E6
Acties van de docent							
Acties van de leerlingen							
Les 2 Driehoeken	E1	E2	E3	E4	E5a	E5b	E6
Acties van de docent							
Acties van de leerlingen							
Les 3 Omtrek van cirkel	E1	E2	E3	E4	E5a	E5b	E6
Acties van de docent							
Acties van de leerlingen							
Les 4 oppervlakte van cirkel	E1	E2	E3	E4	E5a	E5b	E6
Acties van de docent							
Acties van de leerlingen							

	Voldaan
	Deels voldaan
	Niet voldaan
	Niet doorlopen

6.2 Analyse per 6E-les

Hieronder is per les een toelichting gegeven op de resultaten die zijn weergegeven in de kleurentabel. Het betreft een samenvatting van die les met bevindingen die voortvloeien uit de eerste drie instrumenten.

6.2.1 Les 1: parallellogrammen

Les 1 Parallellogrammen	E1	E2	E3	E4	E5a	E5b	E6
Acties van de docent							
Acties van de leerlingen							

Bij het evalueren van relevante voorkennis door naar definities van begrippen te vragen en de stelling van Pythagoras te herhalen (E1), krijgen verschillende leerlingen de beurt. Ook bij het motiveren van leerlingen via een stemming in de klas bij een instapvraag (E2) komen verschillende leerlingen aan het woord. De gewenste antwoorden worden ook gegeven, dus daarom zijn deze fasen beoordeeld met groen.

Uit de video-analyse blijkt dat fase E3 bij sommige groepjes meer dan een kwartier tijd in beslag neemt. De docent reageert klassikaal op wat hij ziet bij het rondlopen. Hij geeft aan dat de leerlingen beter moeten lezen en niet zomaar moeten gaan knippen en plakken. Sommige groepjes komen niet uit opgave 1, waarbij het laatste voorbeeld lastig is. Soms is het zo dat de zwakke leerling die parallellogram toevallig krijgt. Een aantal leerlingen werkt ook sneller of juist langzamer dan de rest van het groepje. Ze nemen niet allemaal de moeite om elkaar te helpen en het elkaar uit te leggen. De begrippen basis en hoogte worden geïntroduceerd middels de opgeplakte rechthoeken, maar deze zijn soms verkeerd geplakt. Deze begrippen lijken niet voor alle leerlingen duidelijk te zijn. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat bij opgave 3 vaak de rechthoek wordt getekend die kan worden gemaakt, en niet alleen de hoogte (alleen een lijnstuk). De leerlingen houden vast aan het idee dat je er een rechthoek mee kan maken en zien niet dat je de lengte en breedte van die rechthoek direct al in het parallellogram kan aangeven. Fase E3 is daarom beoordeeld met oranje: een door de docent gekozen voorbeeld is te lastig en de gekozen introductie van de begrippen basis en hoogte zorgt niet voor het gewenste gebruik ervan. Wat betreft de leerlingen hadden sommigen beter moeten lezen en samenwerken.

Ook bij opgave 4, die hoort bij fase E4, zijn er leerlingen die vasthouden aan het verknippen tot een rechthoek, in plaats van op zoek te gaan naar een basis en een bijbehorende hoogte. Die opgave wordt volgens de analyse van opgavenbladen wel goed gemaakt. Daarom is deze fase beoordeeld met groen.

Er zijn leerlingen die zelfstandig slechts t/m fase E4 zijn gekomen. E5b heeft daardoor plaatsgevonden terwijl nog niet alle leerlingen E5a hadden doorlopen. Wat betreft E5a heeft de docent gezorgd voor een opgave waarin leerlingen de ontdekte wetmatigheid uit de voorafgaande concrete voorbeelden moesten formuleren. Dit is (voor alle lessen) met groen beoordeeld. Sommige leerlingen hebben bij die formulering geen formele wiskundetaal gebruikt. Het was bij het analyseren van de opgavenbladen niet te bepalen welk gedeelte van E5a de leerlingen zelf hadden opgeschreven en wat ze van E5b hadden overgeschreven. De antwoorden die zijn gegeven, waren wel juist. Daarom heeft E5a voor de leerlingen oranje gekregen.

E5b krijgt oranje, omdat weinig verschillende leerlingen aan bod kwamen en uit het observatieformulier blijkt dat de essentiële waarom-vragen door één leerling zijn beantwoord. Bij het laatste voorbeeld dat de docent gaf, heeft hij het zelf voorgedaan. De bel was al gegaan. Voor E6 geldt dat de docent dan ook niet is teruggekomen op de onopgeloste instapvraag van E2, en daarom oranje toegekend heeft gekregen. Twee zwakke leerlingen heeft hij nog extra uitleg gegeven voordat zij het lokaal verlieten. Uit de analyse van opgavenbladen bleek dat de leerlingen nauwelijks zelfstandig uit de toepassingsopgaven 6 en 7 kwamen. Daarom is dit met rood beoordeeld.

6.2.2 Les 2: driehoeken

Les 2 Driehoeken	E1	E2	E3	E4	E5a	E5b	E6
Acties van de docent							
Acties van de leerlingen							

De vorige les geldt als voorkennis voor deze les. De kennis uit die les is opgehaald door terug te komen op de instapvraag. De moeilijke toepassingsvragen van de vorige les heeft de docent op het bord uitgewerkt. De bespreking neemt veel tijd in beslag, doordat de docent het tempo eruit haalt door veel te herhalen en onnodig veel woorden te gebruiken, maar hij haalt daarmee wel relevante voorkennis op (E1). De leerlingen letten op en geven antwoord op enkele vragen. Beiden zijn beoordeeld met groen. Voor het motiveren (E2) wordt wederom een stemming gehouden bij een instapvraag. Leerlingen zijn verdeeld. Beiden zijn beoordeeld met groen.

Bij de instructie op E3 geeft de docent aan wat hij van het samenwerken en knippen/plakken verwacht. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat de exploreeropgaven goed zijn gemaakt. Ieder voorbeeld van opgave 1 blijkt echter op 2 manieren te kunnen, en die tweede manier is niet handig voor het vervolg. Gelukkig kiezen bijna alle leerlingen voor de gewenste manier. De docent had in het voorbereiden van de opdracht hier wel alert op moeten zijn, dus de acties van de docent zijn met oranje beoordeeld. De docent heeft wel gesloten vragen gesteld en heeft leerlingen in drietallen coöperatief laten leren. Hij heeft dit coöperatief leren ook bewaakt. Verder worden de begrippen basis en hoogte gecheckt doordat ze in een tekening aangegeven moeten worden. Dat ontbrak in de les van gisteren. Dat wordt nu goed gedaan. De leerlingen gebruiken de kennis van de vorige les succesvol om zelf nieuwe wetmatigheden te ontdekken in de aangereikte voorbeelden. Daarom wordt E3 voor de leerlingen beoordeeld met groen, evenals fase E4 en E5a: de docent heeft opgaven geselecteerd die leerlingen kunnen maken na fase E3, de leerlingen hebben de zojuist ontdekte wetmatigheid toegepast in nieuwe contextloze voorbeelden en deze vervolgens geformuleerd.

Bij E5b komt van twee groepjes centraal aan bod wat ze bij E5a hebben geformuleerd. De docent schrijft de bevindingen op het digibord. Hij heeft toegezien op het gebruik van wiskundige begrippen en heeft bij onjuiste formele wiskundetaal gewacht op reacties uit de klas. De docent vraagt een ander groepje naar het waarom: hoe komen die groepjes daarbij? Daarmee wordt aandacht gegeven aan 'weten waarom'. Een leerling uit dat groepje legt de ontdekte formule uit. De leerlingen krijgen gebaseerd op de goede uitleg en antwoorden de kleur groen. Soms geeft de docent een eigen interpretatie van wat de leerling heeft gezegd en stuurt hij daarmee het gesprek. De docent vraagt door en gebruikt nieuwe voorbeelden. Bij die nieuwe voorbeelden betreft hij geen leerlingen, hij licht zelf het een en ander toe. Omdat hij in deze acties stuurt en tot op zekere hoogte doceert zijn de docentacties beoordeeld met oranje.

Tijdens E6 komt de docent terug op de instapvraag van E2. De docent loopt ook nog rond en biedt hulp. De docent differentieert in de hulp die hij aanbiedt. De meeste groepjes vertonen zelfredzaamheid. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat bij opgave 6 fouten worden gemaakt bij het berekenen van de hoogte. Pythagoras wordt verkeerd ingevuld, of de zijde wordt als hoogte gezien terwijl die niet loodrecht staat op de basis. Bij opgave 7 gaat de tweede vraag regelmatig fout, en opgave 8 is niet altijd gemaakt. Sommige leerlingen kwamen er wel uit of waren goed op weg. Daarom is aan E6 voor de leerlingen de kleur oranje toegekend. Aan het begin van de volgende les heeft de docent de toepassingsvragen besproken. Dit geldt niet als voorkennis voor die les en valt daarmee onder E6 van deze les als het evalueren van de leerwinst van die les. Dit gebeurde weinig interactief, dus van aantonen van de leerwinst door leerlingen is minder sprake. De docent bespreekt een deel van opgave 7 en geheel opgave 8 van het opgavenblad. De tweede vraag van opgave 7 is overgeslagen, terwijl uit de latere analyse van het opgavenbladen bleek dat de leerlingen vooral die vraag lastig vonden. Bij het bespreken van opgave 7 is de docent regelmatig onduidelijk in zijn vraagstelling, toch worden de gewenste antwoorden gegeven. Van opgave 8 heeft de docent beide deelvragen uitgewerkt. Dat kost veel tijd. Hij twijfelt soms over zijn aanpak en maakt ook fouten in de uitwerking. Daarom is aan de docentacties de kleur groen toegekend.

6.2.3 Les 3: omtrek van een cirkel

Les 3 Omtrek van cirkel	E1	E2	E3	E4	E5a	E5b	E6
Acties van de docent							
Acties van de leerlingen							

De docent evalueert kort de voorkennis door te vragen naar de begrippen straal en diameter en hoe die zich tot elkaar verhouden, hoe je de een kan berekenen als je de ander weet. De leerlingen geven de gewenste antwoorden. Beiden zijn beoordeeld met groen (E1).

Het motiveren van leerlingen gebeurt via een afbeelding op het digibord. Dit gebeurt vrij rommelig, doordat de docent weinig bedenktijd geeft en hij geeft vooraf niet aan waarnaar toe wordt gewerkt, wat het doel is. Daardoor worden leerlingen minder gestimuleerd initiatief te nemen. Hij geeft vervolgens zelf alle tussenstappen aan via het stellen van gesloten vragen, die de leerlingen kunnen beantwoorden. Hij sluit af met een benadering voor de omtrek van een cirkel met eens straal van 10 cm. Beiden zijn beoordeeld met oranje.

E3 verloopt gemakkelijk. Opgave 1 wordt door de leerlingen goed uitgevoerd. De leerlingen zijn na een paar minuten klaar met het meten. Bij de klassikale uitwisseling die de docent leidt, blijkt dat het 1 groepje niet gelukt is om tot de factor te komen. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat ook de andere exploreeropdrachten goed worden gemaakt. De leerlingen komen op een gemiddelde factor in de klas van 3,45. Beiden zijn beoordeeld met groen.

Tijdens E4 werken de groepjes door en kunnen zelfstandig werken aan het opgavenblad. Opgave 4 van het opgavenblad wordt goed gemaakt. Daarbij passen de leerlingen de ontdekte kennis toe op eenvoudige voorbeelden. De docent wijst verder nog op het goed lezen. Wederom zijn de acties van de docent en de leerlingen beoordeeld met groen.

Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat bij opgave 5 (E5a) veel verschillende antwoorden worden gegeven waar wel de juiste gedachte achter zit: 19 van de 24 antwoorden zijn als 'goed' beoordeeld. Uit slechts een paar antwoorden blijkt dat er nog geen begrip is van een vaste verhouding tussen diameter en omtrek van een cirkel. Een herhalende uitwerking bij opgave 6 is die waarbij niet wordt vergeleken met de eigen factor en het eigen voorwerp, maar met het antwoord op opgave 4. De vraagstelling kan duidelijker. Wederom zijn de acties van de docent en de leerlingen beoordeeld met groen.

Bij E5b wordt ook beoordeeld met groen: de docent vraagt aan drie groepjes wat ze hebben opgeschreven bij opgave 5 en schrijft dit op het digibord. De docent zet een verwoording van een leerling om in formele wiskundetaal. 1 groepje komt met een juiste inbreng maar deze zou leiden naar $\text{diameter} = \text{omtrek} : \text{factor}$. De docent stuurt dit naar $\text{omtrek} = \text{diameter} \times \text{factor}$. Een leerling komt met π . De docent gaat daarop in. Hij introduceert π als factor en laat de knop daarvoor op de rekenmachine zien.

De docent had niet voorbereid om tijdens E6 terug te komen op de afbeelding uit E2, terwijl achteraf daar het verloop van de les mee viel samen te vatten (de factor begon bij 3, toen gezamenlijk gekomen op 3,445 en uiteindelijk weten we 3,1415...). De docent loopt nog rond en biedt hulp. De meeste groepjes werken door en kunnen zelfstandig in de drietallen werken aan het opgavenblad. De docent differentieert in de hulp die hij aanbiedt. Twee zwakke leerlingen heeft hij nog extra uitleg gegeven voordat zij het lokaal verlieten. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat de toepassingsopgaven vrij goed gaan. Bij de laatste vraag van opgave 7 wordt vaak vergeten nog te delen door 2 voor de straal. Leerlingen hebben moeite met de laatste vraag van opgave 8. Die wordt opengelaten of fout gemaakt. Opgave 9 gaat vervolgens bij de meeste leerlingen, bij 5 van de 6 geanalyseerde opgavenbladen, goed. Daarom is ook deze fase met groen beoordeeld.

6.2.4 Les 4: oppervlakte van een cirkel

Les 4 oppervlakte van cirkel	E1	E2	E3	E4	E5a	E5b	E6
Acties van de docent							
Acties van de leerlingen							

E1 is voor zowel de docent als de leerling beoordeeld met groen. De vorige les geldt als voorkennis voor deze les. De docent heeft eerst een samenvatting gegeven van de vorige les en heeft toepassingsopdracht 8 voorgedaan. Het motiveren (E2) is voor de docent met oranje beoordeeld, omdat net als in de vorige les bij vragen rondom afbeeldingen op het digibord weinig bedenktijd is gegeven. Ook geeft hij vooraf niet aan waarnaar toe wordt gewerkt, wat het doel is. Hij leidt de afbeelding niet in. De gesloten vragen, waarmee de docent de tussenstappen zet, kunnen de leerlingen beantwoorden en een leerling beantwoordt de afsluitende vraag goed, dus voor de leerlingen is dit beoordeeld met groen.

Het exploreren, E3, heeft langer geduurd dan verwacht. Leerlingen kwamen niet zelfstandig verder, waardoor het veel tijd in beslag nam. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat de eerste exploreeropgave nog bij het merendeel goed gaat. Tijdens de les leek slechts 1 groepje ook grotendeels zelfstandig uit het vervolg te komen. De andere groepjes hebben veel hulp nodig. Bij opgave 2 worden weinig juiste antwoorden gegeven. Bij opgave 3 gaan leerlingen meten i.p.v. te redeneren vanuit hoe het figuur is ontstaan. De docent had in de vraagstelling meer kunnen sturen naar het gewenste antwoord, en er had met het opmeten meer rekening kunnen worden gehouden. Omdat de leerlingen niet zelfstandig tot de ontdekking van de wetmatigheid kwamen, zijn die acties met rood beoordeeld. De acties van de docent zijn met oranje beoordeeld, vanwege de tekortkoming in de vraagstelling bij de voorbeelden.

De acties van de leerlingen tijdens E4 zijn beoordeeld met oranje, omdat op de video-opname te zien is dat sommige groepjes niet verder werken, omdat ze niet zelfstandig verder kunnen. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat opgave 4 (E4) grotendeels goed wordt gemaakt. Maar het is niet duidelijk of leerlingen hiervoor de later klassikaal opgestelde formule hebben gebruikt. De docent begeleidt intensief. Zijn acties zijn beoordeeld met groen.

E5a heeft de kleur zwart, omdat deze door vrijwel alle leerlingen is overgeslagen. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat bij opgave 5 (E5a) bijna alleen delen van of de complete klassikale bespreking zijn opgeschreven. Het is onduidelijk wel gedeelte leerlingen zelf hebben verwoord en tot welke wetmatigheden ze zelf zijn gekomen.

Bij E5b zorgt de docent niet voor uitwisseling van de bevindingen van opgave 5, aangezien de groepjes daar nog niet waren. Hij zorgt ervoor dat klassikaal de formule voor de oppervlakte van een cirkel wordt opgesteld, zodat leerlingen thuis wel de toepassingsopgaven kunnen maken. Hij geeft de stappen aan, kijkt daarvoor eerst gezamenlijk terug naar opgave 3, en stelt gesloten vragen. Verschillende leerlingen komen aan de beurt. De formule wordt stapje voor stapje samen opgebouwd. Uiteindelijk wordt de gevonden formule vergeleken met de bevindingen van E2. Aangezien de docent bij E5b in het formuleren het voortouw heeft genomen, en de leerlingen volgden, zijn voor beiden de acties beoordeeld met oranje. De laatste paar minuten hebben de leerlingen met de inmiddels bekende formule kunnen werken aan de overige opgaven (E6). Deze fase is voor hen beoordeeld met rood, aangezien uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat leerlingen veel moeite hadden met toepassingsopgaven 6 t/m 8. Ze halen bijvoorbeeld delen van de formule voor de omtrek en de oppervlakte door elkaar, en werken kwadraten weg door te delen door 2. Opgave 7 is misschien verwarrend, aangezien andere wiskundige inhoud erbij betrokken wordt, terwijl de zojuist opgedane kennis nog pril is. Omdat de docent deze opdracht wel heeft toegevoegd, zijn zijn acties beoordeeld met oranje.

6.3 Analyse per 6E-fase

Hieronder is iedere 6E-fase apart toegelicht door deze specifieke fase van de vier lessen samen te bestuderen. Dit helpt om antwoord te geven op de 'subdeelvragen':

- Hoe verloopt het centraal wekken van interesse via prikkelende vragen, uitdagende problemen en demonstraties van de docent (E2 *engageren*)?
- Hoe gaat het werken aan de opdrachten voor fase E3 *exploreren*?
- Hoe worden de contextloze opdrachten gemaakt waarin empirische kennis wordt toegepast (E4)?
- Hoe gaat het zelf verwoorden van wat ontdekt is (E5a)?
- Hoe gaat het centraal uitwisselen van wat de leerlingen ontdekt hebben (E5b)?

De resultaten uit de vragenlijst die bij de specifieke fase horen, zijn ook weergegeven. Tevens zijn daarop aansluitende resultaten uit het interview benoemd.

6.3.1 Fase E1: evalueren van de begincompetenties

Les 1 Parallellogrammen	E1
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 2 Driehoeken	E1
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 3 Omtrek van cirkel	E1
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 4 oppervlakte van cirkel	E1
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	

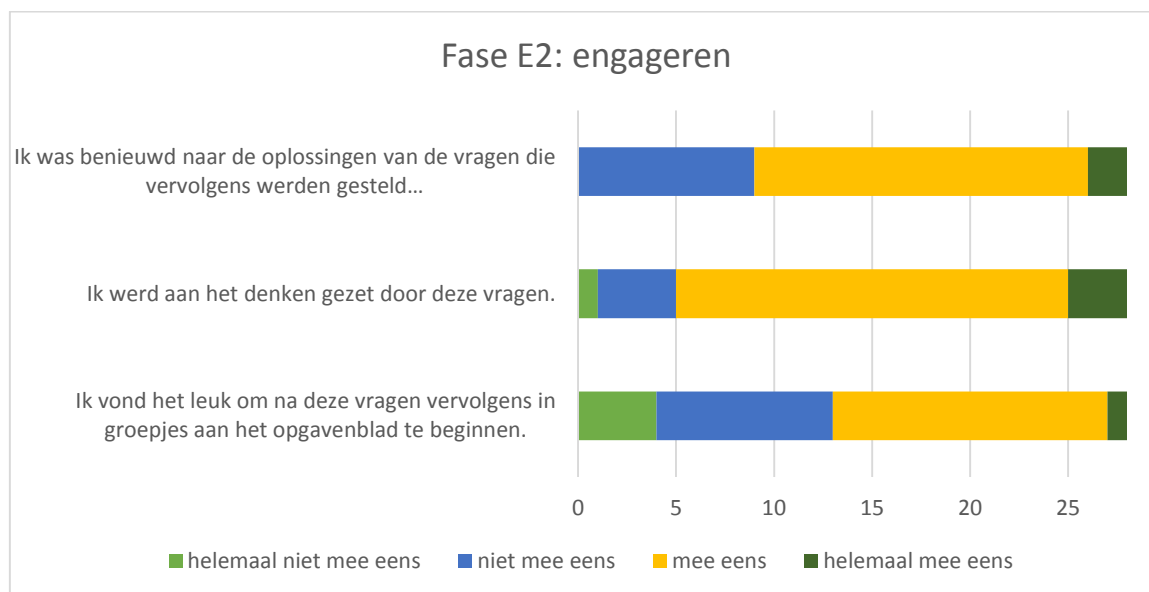
Het evalueren van de begincompetenties is voor iedere les met groen beoordeeld, omdat relevante voorkennis altijd is opgehaald, de ene les meer interactief dan de andere les. Bij de eerste les is gevraagd naar definities en bekende concepten, bij les 2 en les 4 zijn toepassingsopdrachten van de vorige les besproken en bij les 3 zijn de begrippen straal en diameter herhaald. Bij les 2 is ook nog teruggekeken naar de instapvraag van les 1. Het bespreken van toepassingsopdrachten kosten behoorlijk wat tijd. De docent had dit korter kunnen doen door de uitwerking op papier voor te bereiden of altijd direct op het digibord te presenteren, zoals in les 4.



6.3.2 Fase E2: engageren

Les 1 Parallellogrammen	E2
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 2 Driehoeken	E2
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 3 Omtrek van cirkel	E2
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 4 oppervlakte van cirkel	E2
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	

Het motiveren, of engageren, is in de eerste twee lessen volgens een stemming gegaan bij een prikkelende instapvraag: welke is qua oppervlakte groter, ... of? Op deze stemming is teruggeblikt tijdens E6 van de betreffende les of tijdens E1 van de volgende les. Bij les 3 en 4 is het motiveren via afbeeldingen op het digibord gegaan, waarbij een eerste benadering voor een wetmatigheid werd gevonden. Dit motiveren had meer effect kunnen hebben als de leerlingen meer betrokken werden door de afbeelding in te leiden en daarbij het doel aan te geven: we zijn op zoek naar een benadering voor... En door meer bedenktijd te geven. Er had ook een werkvorm in kunnen worden gezet om leerlingen meer te activeren, bijvoorbeeld denken-delen-uitwisselen. De leerlingen hebben nu antwoord gegeven op gesloten vragen waar de docent de tussenstappen naar het einddoel mee aangaf. In les 3 verwoordde de docent de uiteindelijke benadering zelf, bij les 4 werd dit door een leerling gedaan.

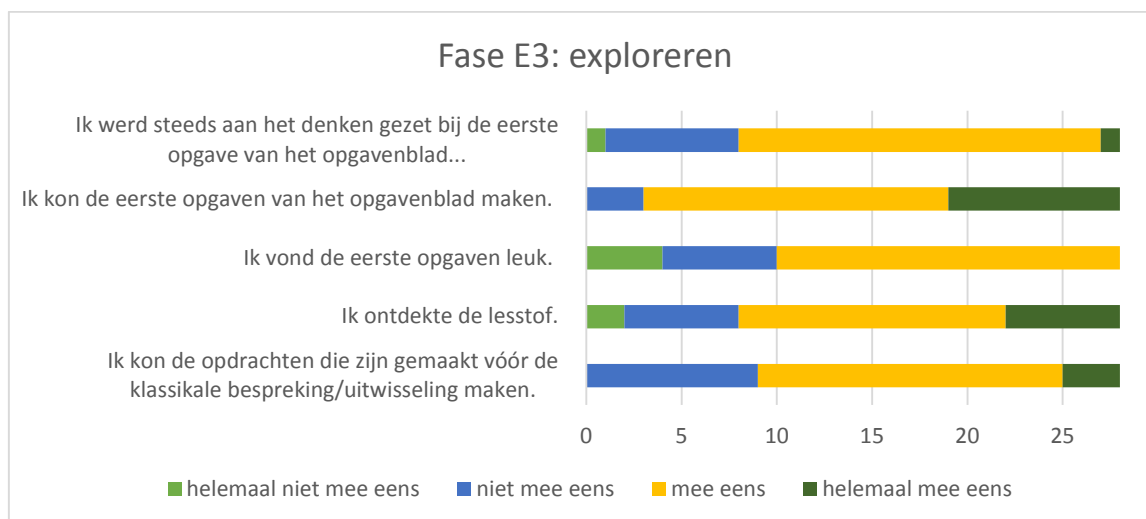


9 van de 28 leerlingen geven aan het niet eens te zijn met de stelling dat ze benieuwd waren naar de oplossing van de instapvraag. Zoals hierboven aangegeven konden de leerlingen in les 3 en 4 hier ook meer bij worden betrokken. 13 van de 28 leerlingen geeft aan het (helemaal) niet eens te zijn met de stelling dat ze het leuk vonden om in de groepjes aan het opgavenblad te beginnen. In het interview geeft de zwakke leerling aan dat ze dit heeft ingevuld, omdat ze het samenwerken niet prettig vond gaan. De sterke leerling geeft aan dat hij wiskunde niet erg vindt om te doen, maar als het moet is het voor hem toch anders.

6.3.3 Fase E3: exploreren

Les 1 Parallelogrammen	E3
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 2 Driehoeken	E3
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 3 Omtrek van cirkel	E3
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 4 oppervlakte van cirkel	E3
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	

Het exploreren gebeurde via de eerste paar opgaven van het opgavenblad, waarbij in verschillende voorbeelden een wetmatigheid moest worden ontdekt. Voor de eerste twee lessen hebben leerlingen moeten knippen en plakken en daarbij een tabel moeten invullen. In de eerste les werd in sommige drietallen niet samengewerkt, bijvoorbeeld niet bij het (te) lastige voorbeeld. Ook gingen leerlingen aan de slag zonder te lezen wat de bedoeling was. De wetmatigheid (opp. parallellogram = opp. rechthoek) werd wel ontdekt, maar de nieuwe begrippen basis en hoogte werden via opgave 2 en 3 niet duidelijk geïntroduceerd. Dit leidde niet tot het gewenste gebruik van de begrippen basis en hoogte. In les 2 ging dit knippen en plakken wel goed. Ieder voorbeeld van opgave 1 blijkt echter op 2 manieren te kunnen, en die tweede manier is niet handig voor het vervolg. De begrippen basis en hoogte worden in de tweede les wel juist gebruikt. Voor de leerlingen zijn deze begrippen inmiddels meer expliciet geworden. In les 3 hebben de meeste leerlingen de wetmatigheid ontdekt tussen de diameter en de omtrek van een cirkel met een voorwerp en een touwtje. In les 4 ging het exploreren niet succesvol. Leerlingen gingen meten i.p.v. te redeneren vanuit hoe de figuren zijn ontstaan. De vraagstelling had meer sturend kunnen zijn via gesloten vragen bij opgave 2 en opgave 3. Het lukte de groepjes pas toen de docent hielp. Hij stelde gesloten vragen rondom de lengte van de rechthoek en dat deze bestond uit de helft van het aantal boogjes. Dat kan in het opgavenblad verwerkt worden.

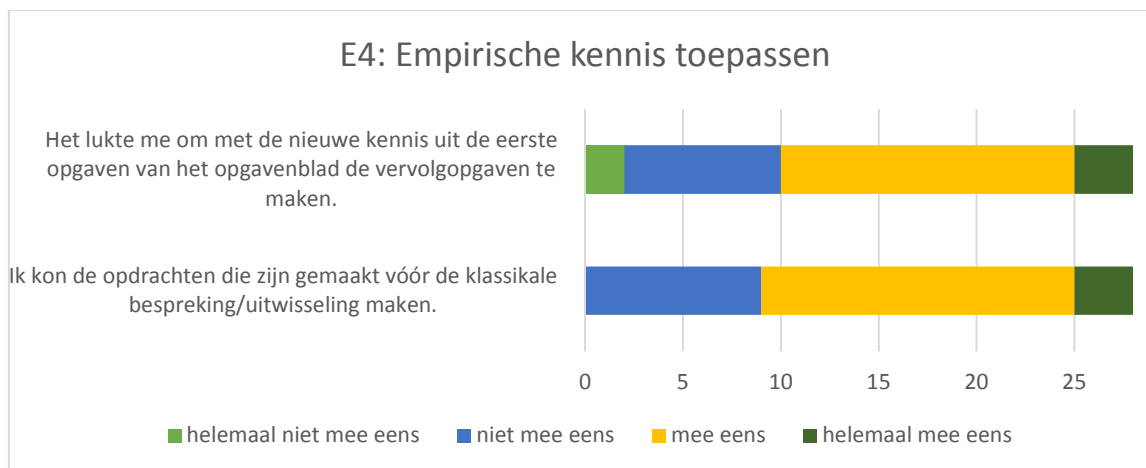


25 van de 28 leerlingen geven aan dat ze de eerste opgaven van het opgavenblad konden maken. Vervolgens geven 9 van de 28 leerlingen aan het niet eens te zijn met de stelling dat ze de opdrachten die gemaakt zijn vóór de klassikale bespreking konden maken. Het lijkt zo te zijn dat deze leerlingen bij de eerste opgaven niet het vertrouwen hebben ontwikkeld om de vervolgopgaven (E4) te maken. 10 van de 28 leerlingen geven aan het niet eens te zijn met de stelling dat ze de eerste opgaven leuk vonden. De sterke leerling zegt in het interview daarover dat het knippen bij les 1 lastig was, en dan het moeilijkste voorbeeld. Hij vond het veel werk om te knippen en het duurde lang.

6.3.4 Fase E4: empirische kennis toepassen

Les 1 Parallellogrammen	E4
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 2 Driehoeken	E4
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 3 Omtrek van cirkel	E4
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 4 oppervlakte van cirkel	E4
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	

Het toepassen van de opgedane kennis bij E3 gebeurde via een contextloze opgave (wat oefensommen). In de eerste les zijn er leerlingen die vasthouden aan het verknippen tot een rechthoek wat bij het exploreren is gedaan, in plaats van op zoek te gaan naar een basis en een bijbehorende hoogte. Die opgave wordt volgens de analyse van opgavenbladen wel goed gemaakt, want het leidt ook tot het goede antwoord. Het is alleen geen efficiënte oplossingsstrategie. Bij les 2 en 3 gaat dit toepassen van de empirische kennis volgens de analyse van de opgavenbladen ook goed. Bij les 4 is het niet te achterhalen of leerlingen de juiste uitwerking van de opgaven aan de hand van de opgedane empirische kennis hebben gemaakt, of daarvoor de later klassikaal opgestelde formule hebben gebruikt. Het is opvallend om te zien dat uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat de meeste leerlingen de juiste antwoorden geven, terwijl in de vragenlijst 10 van de 28 leerlingen aangeven dat het niet lukte om met de nieuwe kennis uit de eerste opgaven de vervolgopgaven te maken. In het interview geeft een leerling aan dat je bij het maken van de opdrachten niet wist of je het goed deed, omdat je tussentijds geen feedback kreeg. De leerling twijfelt daardoor aan de ontdekte wetmatigheid: klopt mijn idee wel?

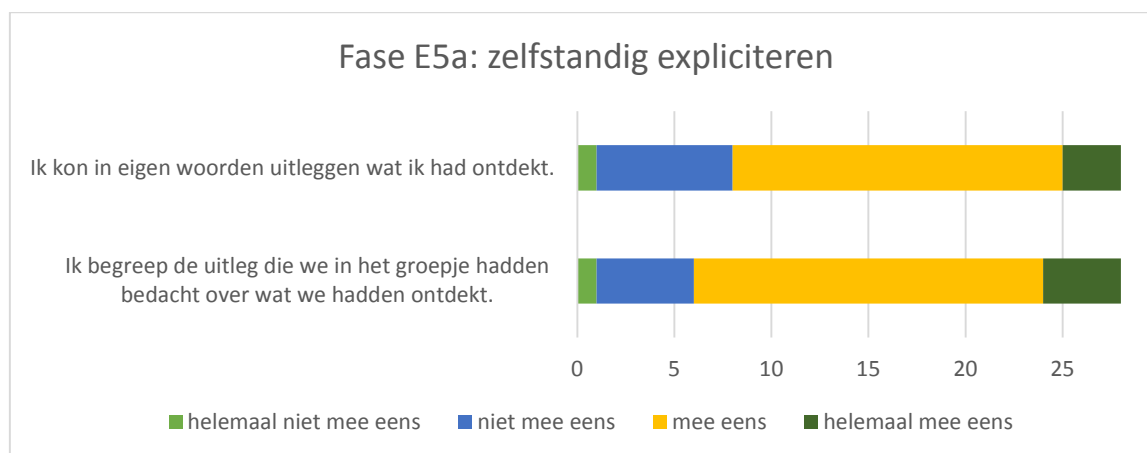


10 van de 28 leerlingen geven aan het (helemaal) niet eens te zijn met de stelling dat ze de opgaven na het exploreren konden maken. 9 van de 28 leerlingen geeft aan het niet eens te zijn met de stelling dat ze de opdrachten die gemaakt zijn vóór de klassikale bespreking konden maken. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat de leerlingen deze opgaven wel konden maken. Het kan zijn dat ze de toepassingsvragen (E6) in gedachte hadden bij het beantwoorden. Ook lijkt het zo te zijn dat leerlingen niet vertrouwen op hun empirische kennis. Ze krijgen niet altijd feedback of ze het goed hebben gedaan. De sterke leerling geeft in het interview aan daarom het werken in het boek fijner te vinden: er staat hoe je het moet doen, wat helpt als hij er niet uitkomt, en hij kan dan in zijn eigen tempo doorwerken. De zwakke leerling geeft aan dat zij bij de middelste opdrachten (E4) pas door kreeg hoe het moest. Zij heeft moeten leren via uitgewerkte voorbeelden van groepsgenoten en door te oefenen. Zij heeft tijdens E3 geen eigen idee ontwikkeld waar die uitwerkingen op gebaseerd zijn.

6.3.5 Fase E5a: expliciteren (zelfstandig)

Les 1 Parallelogrammen	E5a
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 2 Driehoeken	E5a
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 3 Omtrek van cirkel	E5a
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 4 oppervlakte van cirkel	E5a
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	

Het zelfstandig expliciteren zou eigenlijk een belangrijk onderdeel zijn van dit onderzoek: lukt het de klas om te verwoorden wat ze ontdekt hebben? Bij het analyseren van de opgavenbladen zijn uiteindelijk van les 2 en les 3 van alle ingeleverde opgavenbladen de opdrachten behorende bij het zelf verwoorden bekeken. In les 1 en 4 zijn de meeste leerlingen daar in de les niet aan toegekomen. De docent heeft wel gezorgd voor een opgave waarin leerlingen de ontdekte wetmatigheid uit de voorafgaande concrete voorbeelden moesten formuleren, maar het is mogelijk dat de leerlingen de klassikale bespreking (E5b) over hebben geschreven, waardoor voor E5a alleen voorzichtige uitspraken te doen zijn. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat voor de tweede en derde les 19 van de 24 gegeven antwoorden als goed zijn beoordeeld. De 'foute' antwoorden van les 2 zijn vaak deels wel goed. Bij les 3 blijkt uit slechts een paar antwoorden dat er nog geen begrip is van een vaste verhouding tussen diameter en omtrek van een cirkel. Van les 1 en 4 zijn van de 6 bekeken opgavenbladen 5 van de 6 als goed beoordeeld.



8 van de 28 leerlingen zijn het (helemaal) oneens met de stelling dat ze in eigen woorden uit konden leggen wat ze ontdekt hadden. In andere vragen geeft een wat kleiner deel van de leerlingen aan niet uit te kunnen leggen waarom de vier verschillende ontdekte formules gelden. Voor les 1 en 2 zeggen alle leerlingen op één na dit uit te kunnen leggen, voor les 3 is dit driekwart van de leerlingen en voor les 4 zijn het 23 van de 28 leerlingen.

6.3.6 Fase E5b: expliciteren (klassikaal)

Les 1 Parallelogrammen	E5b
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 2 Driehoeken	E5b
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 3 Omtrek van cirkel	E5b
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 4 oppervlakte van cirkel	E5b
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	

Het klassikaal uitwisselen van wat de leerlingen ontdekt hebben, is in de eerste 3 lessen gebeurd via het vragen wat ze bij de opgave van E5a hebben opgeschreven. Daarbij moest een formule worden opgesteld. Steeds zijn de resultaten van 2 of 3 groepjes aan bod gekomen en op het bord geschreven. Op het opgavenblad is bij E5a vrijwel altijd alleen de formule opgeschreven zonder uitleg van de wetmatigheid. Dat valt onder 'weten hoe' en minder onder 'weten waarom'. Daarom is vervolgens klassikaal door de docent naar het waarom gevraagd. Zo is in les 2 is aan een groepje gevraagd om de uitleg te geven bij de bevindingen van een ander groepje, waarmee ook meer leerlingen bij het expliciteren zijn betrokken. Dat aantal was in de eerste les minder. Toen zijn weinig leerlingen aan het woord geweest en uit het observatieformulier blijkt dat de essentiële waarom-vragen door één leerling zijn beantwoord. De docent gaf daarna nog wat voorbeelden om de probleemaanpak (weten hoe) ook expliciet te maken en te checken of de leerlingen weten hoe ze de formule moeten gebruiken. Bij het laatste voorbeeld dat de docent gaf, heeft hij het zelf voorgedaan. Bij de voorbeelden van les 2 om de probleemaanpak expliciet te maken, betreft de docent wederom geen leerlingen. Hij licht zelf het een en ander toe. Hij stuurt hiermee onnodig en doceert tot op zekere hoogte. In die tweede les heeft de docent toegezien op het gebruik van wiskundige begrippen en hij heeft bij onjuiste formele wiskundetaal gewacht op reacties uit de klas. In les 3 stuurt de docent een juiste inbreng van een groepje naar de gewenste vorm van de formule. In les 4 stuurt de docent nog veel sterker. Bij les 4 zijn de leerlingen niet aan E5a toegekomen. Toen is klassikaal de formule opgesteld, waarbij de docent via gesloten vragen de weg naar die formule heeft uitgezet. De leerlingen konden de gesloten vragen wel beantwoorden. Uiteindelijk is de gevonden formule vergeleken met de bevindingen van E2. Bij het formuleren van les 4 heeft de docent het voortouw genomen door het geringe succes van de voorgaande fases. Het is onmogelijk om tot de formule te komen als de wetmatigheid niet is ontdekt.



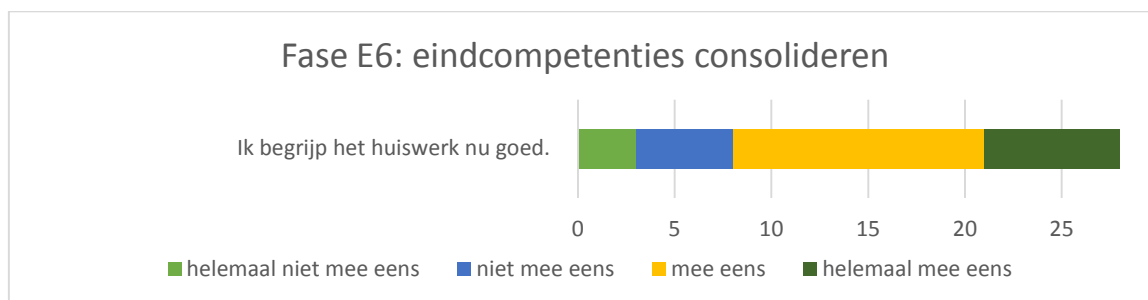
9 van de 28 leerlingen geeft aan het niet eens te zijn met de stelling dat ze de vragen die tijdens de klassikale bespreking gesteld zijn, konden beantwoorden.

6.3.7 Fase E6: eindcompetenties consolideren

Les 1 Parallellogrammen	E6
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 2 Driehoeken	E6
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 3 Omtrek van cirkel	E6
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	
Les 4 oppervlakte van cirkel	E6
Acties van de docent	
Acties van de leerlingen	

Fase E6 loopt van sommige lessen over in fase E1 van de volgende les. Voorkennis wordt dan opgehaald door een toepassingsvraag klassikaal voor te doen (leerwinst evalueren). Het beoordelen van de kwaliteit van de gemaakte uitdagende toepassingsvragen moet voorzichtig worden gedaan, aangezien de uitwerkingen en de probleemaanpak niet kan worden vergeleken met hoe dit was gegaan als er uit het boek werd gewerkt. De meeste toepassingsvragen kwamen uit het boek dat normaal wordt gevolgd. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt in ieder geval dat de leerlingen veel moeite hebben met de toepassingsvragen, terwijl vaak de vorige fasen wel goed of deels goed zijn doorlopen. De leerlingen hebben in de les laten zien de formules te kennen en toe te kunnen passen op eenvoudige voorbeelden (E4 en E5). Voor de eerste les valt wel te zeggen dat de leerlingen verkeerd zijn voorbereid, aangezien het duidelijk is dat veel leerlingen in de les de opgaven hebben aangepakt met het verknippen van het parallellogram tot een rechthoek en hiermee in de toepassingsvragen vastlopen, bijvoorbeeld doordat die parallellogrammen niet meer op roosterpapier zijn afgebeeld. De aanpak via het zoeken van een basis en een bijbehorende hoogte is te weinig expliciet geworden. Dit komt ook terug bij de opgave waarbij een andere zijde als basis moet worden genomen om daarmee de oorspronkelijke basis via de gevonden oppervlakte uit te rekenen. Bij les 4 kan als kritiek worden gegeven dat opgave 7 verwarrend is, aangezien andere (lastige) wiskundige kennis erin voorkomt, terwijl de zojuist opgedane kennis nog pril is.

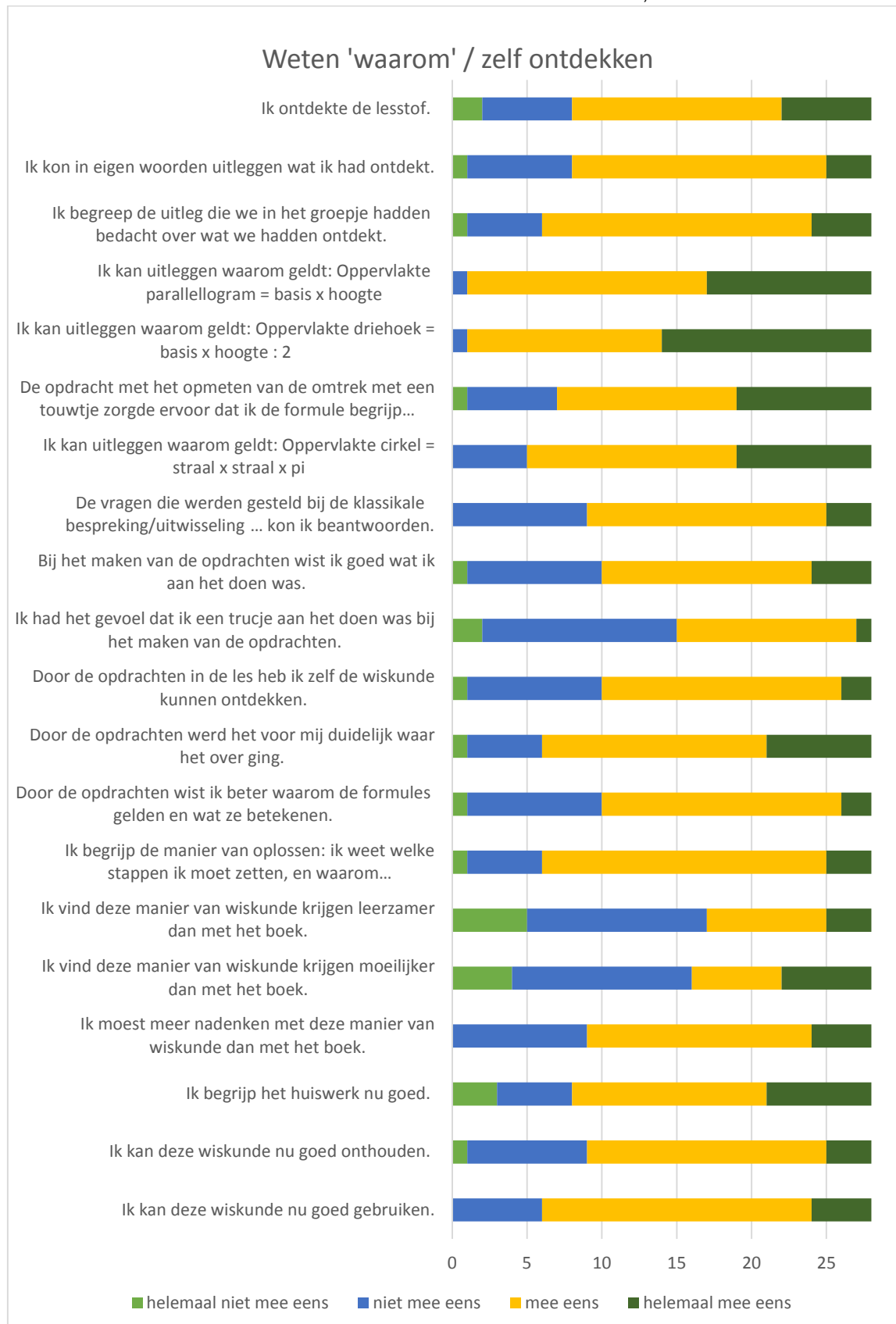
De docent komt bij E6 niet altijd nog terug op het gepresenteerde instapprobleem van E2. Dan kiest hij ervoor dat mee te nemen naar E1 van de volgende les. Verder worden in E6 (of E1 van de volgende les) niet alle toepassingsopgaven besproken. De docent heeft de leerwinst geëvalueerd door een of enkele opgaven voor te doen. Dit gebeurde weinig interactief, dus van aantonen van de leerwinst door leerlingen is minder sprake. Dit moesten ze voor zichzelf checken. Verder is van les 2 een lastige deelvraag niet besproken, terwijl leerlingen daar veel moeite mee hadden en het achteraf ook terug bleek te komen in het proefwerk. De docent heeft bij een andere opgave van die les er juist voor gekozen om de hele opgave te bespreken, terwijl één deelvraag daar weer voldoende was geweest. Daar had hij betere keuzes in moeten maken.



De zwakke leerling zegt in het interview: ik begrijp het nu wel, maar als ik het weer zelf moet doen, dan denk ik dat ik vastloop. De drie geïnterviewde leerlingen wijzen bij de vraag wat de moeilijke opgaven van de opgavenbladen waren grotendeels toepassingsvragen uit het boek aan.

6.4 Analyse van de vragenlijst en het interview

Hieronder worden de overige resultaten besproken van de vragenlijst met aanvullingen uit de interviews. Het betreft de thema's 'weten waarom'/het zelf ontdekken, motivatie en samenwerken.



Drie stellingen zijn door de meerderheid met (helemaal) niet mee eens beantwoord:

- Ik had het gevoel dat ik een trucje aan het doen was bij het maken van de opdrachten (15 van de 28 leerlingen)
- Ik vind deze manier van wiskunde krijgen leerzamer dan met het boek (17 van de 28 leerlingen)
- Ik vind deze manier van wiskunde krijgen moeilijker dan met het boek (16 van de 28 leerlingen)

Deze laatste stelling kwam in twee interviews terug. Toen gaven beide leerlingen aan het er niet mee eens te zijn, omdat zij wisten dat de laatste vragen uit de opgavenbladen ook in het boek stonden. Wat betreft dit moeilijker vinden geeft de sterke leerling in het interview aan dat hij niet uit sommige vragen kwam en bij normale lessen het dan fijn vindt om in het boek te kijken. Hij heeft liever een theorieblokje waarin staat hoe hij het moet doen. De zwakke leerling geeft aan soms te moeilijk te denken, en wijst ter illustratie daarna twee toepassingsvragen aan die uit het boek komen. Ze vond het moeilijk dat ze alles zelf moest uitzoeken en geeft aan dat als ze één opdracht niet snapte ze het vervolg ook niet kon maken. De laatste geïnterviewde leerling geeft aan dat hij het moeilijk vond om samen tot een antwoord te komen, zijn eigen idee daarbij soms te laten varen en dat van een ander gebruiken, terwijl achteraf zijn idee toch goed bleek te zijn. Dat was verwarrend.

De eerste van de drie stellingen hierboven is door sommige leerlingen waarschijnlijk niet begrepen, wat in het interview ook terugkomt bij een leerling. Trucmatig werken betekent dat er weinig begrip is van de handelingen die de leerlingen doen, terwijl uit andere stellingen naar voren komt dat een groter deel van de leerlingen wel 'weet waarom' ze bepaalde stappen moeten zetten. Van de onderstaande twee stellingen zijn de resultaten nagenoeg gelijk: 6 leerlingen hebben helemaal niet mee eens of niet mee eens geantwoord:

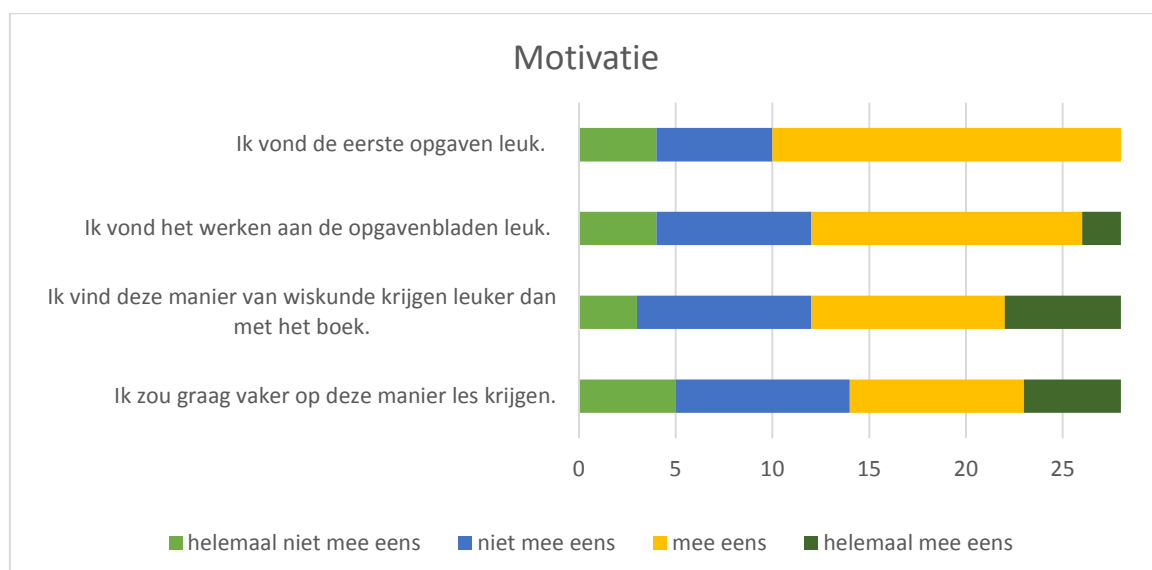
- Door de opdrachten werd het voor mij duidelijk waar het over ging.
- Ik begrijp de manier van oplossen: ik weet welke stappen ik moet zetten, en waarom ik die stappen moet zetten.

Van de onderstaande drie stellingen zijn de resultaten ook nagenoeg gelijk: 10 leerlingen hebben helemaal niet mee eens of niet mee eens geantwoord:

- Bij het maken van de opdrachten wist ik goed wat ik aan het doen was.
- Door de opdrachten in de les heb ik zelf de wiskunde kunnen ontdekken.
- Door de opdrachten wist ik beter waarom de formules gelden en wat ze betekenen.

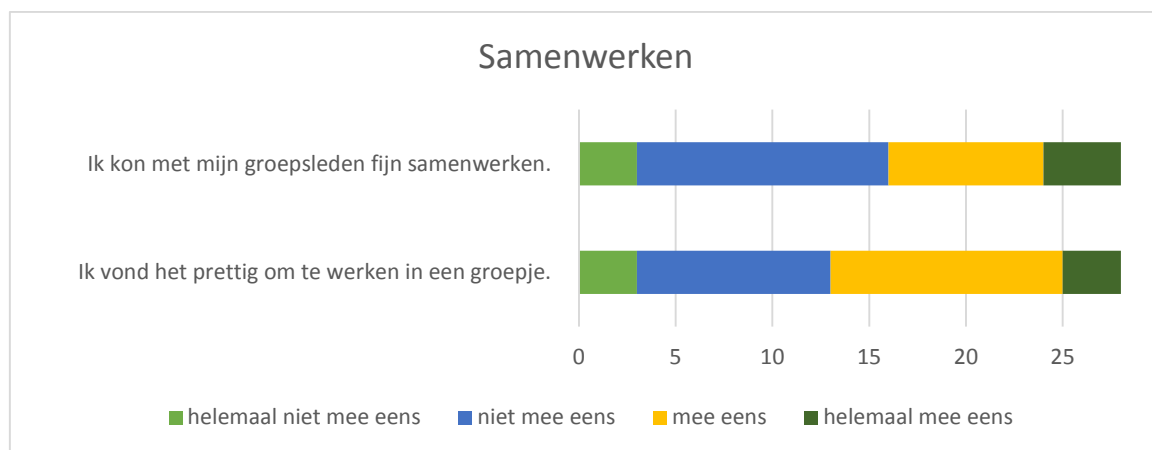
De sterke leerling geeft in het interview aan dat hij het niet eens is met de stelling dat hij door de opdrachten de wiskunde zelf heeft ontdekt, omdat hij vaak pas bij de uitleg bevestigd kreeg of hij het goed deed. Bij het maken van de opdrachten twijfelde hij daarover.

Verder valt op dat de vier stellingen waar het meest helemaal mee eens op is geantwoord, 9 tot 14 keer, gaan over het begrijpen van de vier ontdekte formules en kunnen uitleggen waarom die gelden.



De klas is erg verdeeld wat betreft de waardering voor de 6E-lessen: 12 leerlingen waren het helemaal oneens of oneens met de stellingen dat het werken aan de opgavenbladen leuk was en dat deze manier van wiskunde krijgen leuker is dan met het boek. 6 leerlingen waren het helemaal eens met deze laatste stelling. De helft van de klas zou graag vaker op deze manier wiskunde krijgen en de andere helft niet.

Ook in de interviews kwamen verschillende geluiden naar voren: de zwakke leerling vond het werken aan de opgavenbladen niet leuk, vanwege de samenwerking in het groepje, maar ze zou wel vaker op deze manier les willen krijgen. Dan graag met een klasgenoot waar ze goed mee samen kan werken. Vergeleken met het boek blijkt dat ze de opgavenbladen meer gestructureerd vindt: in het boek gaat alles meer door elkaar en zijn opdrachten anders, en dan snapt ze het niet. Bij de opgavenbladen kwam ze er beter achter of ze het echt snapte of dat ze verkeerd bezig was met de opdrachten. Ook de leerling uit de middengroep vond de opdrachten duidelijker dan in het boek, maar vindt beide manieren van werken fijn. Hij vond deze nieuwe manier fijn, omdat het in stappen was verdeeld en hij het ontdekte. Door de duidelijke opdrachten en de kleine stappen ging hij er makkelijker doorheen dan in het boek. Hij vond de opgaven leuk om te doen en leuker dan in het boek, bijvoorbeeld de exploreeropgaven van les 4. Daar moest hij echt goed nadenken om erachter te komen. De sterke leerling leert liever via het boek. Dan kan hij doorwerken en er staat bij hoe het moet.



De leerlingen hebben in heterogene groepjes gewerkt met jongens en meisjes gemixt. De docent heeft de groepjes gemaakt en heeft daarbij geprobeerd de klasplattegrond zo ver als mogelijk aan te houden. Uit de vragenlijst blijkt dat de meerderheid van de leerlingen aangeeft dat ze niet fijn met de groepsleden konden samenwerken (16 van de 28). 13 van de 28 geeft aan het ook niet prettig te vinden om in een groepje te werken.

De sterke leerling gaf in het interview aan dat de klas gewend is om zelfstandig te werken. Er wordt bij de meeste vakken niet meer gedaan aan samenwerken dan het overleggen met je buurman of buurvrouw bij het maken van opdrachten. In de interviews komen zowel de voordelen als de beperkingen van samenwerken terug. De sterke leerling geeft aan dat het lang duurde om een opdracht te maken, omdat iemand anders in het groepje het niet snapte. De uitleg aan elkaar nam veel tijd in beslag. Hij zegt ook dat hij niet zo goed is in uitleggen aan een ander. Hij geeft echter ook het voordeel aan: soms wist iemand anders in het groepje iets waar hij van kon leren, bijvoorbeeld het lastige voorbeeld van les 1. De zwakke leerling vond de samenwerking helemaal niet prettig. Haar groepsgenoten waren veel met elkaar aan het overleggen. Zij snapte hun bevindingen vaak niet, waardoor zij het aan haar moesten uitleggen. Ze vond het lastig om steeds weer te vragen om uitleg. Daar is ze soms mee gestopt, omdat ze het idee had de anderen op te houden. De anderen werkten dan door terwijl zij een vorige opdracht niet begreep. De leerling uit de middengroep geeft aan dat de samenwerking in zijn groepje goed ging. Hij zegt dat hij anders naar opdrachten ging kijken doordat hij de manier van een ander meekreeg.

6.5 Proefwerkanalyse

Uit het analyseren van de proefwerken blijkt dat bij de oppervlakte van een parallellogram het ongeveer 1 op 3 leerlingen niet lukt om een hoogte uit te rekenen m.b.v. een andere basis en bijbehorende hoogte. In het bijbehorende opgavenblad kwam dit wel terug in de laatste opgave, maar bij de bespreking tijdens de volgende les vonden de leerlingen dat ook lastig. Deze opgave kwam letterlijk uit het boek. In het boek staat nog een opgave die aandacht besteed aan de oppervlakte berekenen op twee manieren (een van de twee verschillende zijden als basis kiezen met een bijbehorende hoogte). Deze is niet opgenomen in het opgavenblad.

Bij de oppervlakte van een driehoek vergeet tot twee keer toe een kwart van de leerlingen te delen door 2. Wanneer de hoogte buiten de driehoek valt, zien vier leerlingen het verlengde van de basis als onderdeel van de basis. Bij het berekenen van een oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek houdt meer dan de helft van de leerlingen geen rekening met het feit dat de basis en hoogte loodrecht op elkaar moeten staan en je dus niet een zijde als hoogte kan nemen.

De omtrek van de cirkel kwam weinig terug in het proefwerk. Eén leerling heeft de formule voor omtrek verwisseld met die voor oppervlakte. Het rekenen met halve cirkels gaat bij drie leerlingen fout, zowel bij de oppervlakte als de omtrek: twee halve cirkels maken 1 hele cirkel, je legt ze tegen elkaar aan. Bij het bepalen van de straal om de oppervlakte te berekenen houden 6 leerlingen hier ook geen rekening mee.

7 Conclusie

7.1 Beantwoording hoofdvraag

Hoofdvraag: In hoeverre lukt het om het onderwerp Oppervlakte van klas V2A op het Udens College vorm te geven met het 6E-model en uit te voeren?

Het is gelukt om de basisparagrafen van het hoofdstuk *Oppervlakte* bij klas V2A op het Udens College uit te voeren met het 6E-model. In iedere les hebben de leerlingen een nieuwe formule (wetmatigheid) ontdekt aan de hand van voorbeelden (abstraheren), vervolgens hebben zij deze zelf verwoord, en toegepast in opgaven van verschillend niveau. Deze opgaven waren samengevoegd in een opgavenblad. Bij de uitvoering van de lessen zijn tekortkomingen in de opgavenbladen naar voren gekomen. Met name in het lesmateriaal voor het exploreren in de les van de oppervlakte van een cirkel moeten aanpassingen worden gemaakt en dit moet opnieuw worden onderzocht. Voor de andere lessen geldt dat het 6E-model zonder twijfel toepasbaar is en succesvolle lessen uit te voeren zijn wanneer de verbeteringen worden doorgevoerd. Die verbeteringen betreffen onder andere het aanbrengen van meer sturing via gesloten vragen, en het aanpassen van de gegeven voorbeelden. Ook zijn er aandachtspunten voor de docent tijdens specifieke fasen naar voren gekomen. In de volgende paragraaf wordt hierop ingegaan aan de hand van de deelvragen van het onderzoek, waaruit blijkt in hoeverre het gelukt is de lessen uit te voeren via het 6E-model. De uitspraken in die paragraaf zijn alleen van toepassing op de voor dit onderzoek ontworpen lessenserie. Soms worden na een deelconclusie suggesties gedaan voor verbetering.

7.2 Beantwoording deelvragen

Deelvraag 1: In hoeverre lopen de lessen zoals gepland?

Les 2 en les 3 liepen nagenoeg gelijk met de lesvoorbereiding, waarin het 6E-model terugkwam en iedere fase in de les doorlopen werd. De eerste en vierde les zijn niet volgens de lesvoorbereiding gelopen. Het exploreren, fase E3, kostten in deze twee lessen meer tijd dan verwacht. Daardoor heeft fase E5b voor veel leerlingen plaatsgevonden, terwijl zij nog niet bij de opgave waren die een invulling aan fase E5a gaf. E6 heeft in die lessen ook geen invulling gehad. Dat hebben de leerlingen als huiswerk meegekregen, maar voor die lessen kwamen zij daar nauwelijks zelfstandig uit.

Verder bleek in de lessen dat de samenwerking in sommige groepjes, die de docent heeft samengesteld, moeizamer verliep dan vooraf was verwacht. De leerlingen ervoeren dat ook zo. Uit het verloop van de lessen blijkt dat een sterke leerling en een zwakke leerling in één groepje zetten niet vanzelf leidt tot samenwerkend leren. Een sterke leerling neemt bijvoorbeeld weinig moeite om het een ander uit te leggen en wil werken in het eigen tempo dat hij/zij gewend is. Ook kan een sterke leerling het wel begrijpen, maar dat betekent niet dat hij/zij het een ander ook duidelijk kan maken. Een zwakke leerling kan zich bij de sterke leerlingen niet op zijn/haar gemak voelen en durft niet herhaaldelijk om uitleg te vragen. Dan voelt die persoon zich bezwaard. Daar kan vooraf rekening mee worden gehouden door die zwakke leerling te vragen met wie hij/zij graag in het groepje zou willen: van wie heeft hij/zij het idee dat die persoon hem/haar goed kan helpen? In andere groepjes verliep de samenwerking wel goed, en hebben de leerlingen elkaars ideeën uitgewisseld en daarvan geleerd.

Deelvraag 2: Hoe verlopen de lesonderdelen waarin zelf ontworpen materialen met betrekking tot fase E2 t/m E5 worden ingezet?

Voor iedere fase wordt hier als conclusie besproken wat aandachtspunten en verbeteringen voor een volgende keer zijn.

Zo moet de docent een goed doordachte keuze maken bij de bespreking van een huiswerkopgave (E6/E1). Deze zou beperkt moeten blijven, omdat het doorlopen van de andere fasen via het ontworpen materiaal meer tijd verlangt. Dat betekent dat 1 goed uitgewerkt voorbeeld voldoende is.

Dat gaven de leerlingen in het interview ook aan. Dit ene voorbeeld kan reeds uitgewerkt gepresenteerd worden. Echter moet in de afweging door de docent ook mee worden genomen wat leerlingen tijdens een latere toets moeten kunnen en waar zij, rekening houdend met eerdere ervaringen, moeite mee hebben.

Voor het engageren (E2) is het belangrijk dat leerlingen actief worden betrokken. Voor het ontworpen lesmateriaal betekent dat dat leerlingen aansluitend op de afbeeldingen een duidelijke vraag voorgelegd krijgen en het doel kennen. Een suggestie voor verbetering is om vervolgens bedenktijd in te bouwen, bijvoorbeeld via een werkvorm als denken-delen-uitwisselen. Naar verwachting bereik je daarmee meer leerlingen die zich betrokken voelen bij de gepresenteerde instapvraag.

Het exploreren, E3, is de fase waarin de leerlingen een eigen idee ontwikkelen bij het bestuderen van voorbeelden. Door op zoek te gaan naar overeenkomsten vindt abstractie plaats. Deze empirische kennis is belangrijk voor het vervolg. In de lessen bleek dat leerlingen niet altijd vertrouwd zijn op hun empirische kennis, terwijl deze bij opgaven die behoorden bij fase E4 wel goed werd gebruikt. Het exploreren is belangrijk: de rest bouwt daarop voort, en het gaat in de essentie om de basis voor het weten 'waarom'. De conclusie luidt dat het niveau van de voorbeelden niet te moeilijk moet zijn. Het exploreren vergt al veel van de leerlingen, aangezien zij opzoek moeten naar gelijkenissen. Het aanreiken van lastige voorbeelden zit voor veel leerlingen het abstraheren in deze cruciale fase in de weg. Een suggestie voor verbetering is om te differentiëren in de voorbeelden: leerlingen die uit eenvoudige voorbeelden snel de wetmatigheid halen, kunnen worden uitgedaagd dit ook bij lastige voorbeelden te ontdekken. Voor de meeste leerlingen zijn basisvoorbeelden die bestudeerd worden via gesloten vragen die sturen naar het gewenste antwoord uitdagend genoeg. Dat zorgt er waarschijnlijk voor dat leerlingen meer vertrouwen op hun empirische kennis. Voor de formule voor de oppervlakte van een cirkel was het lesmateriaal nog niet voldoende om het exploreren succesvol te laten verlopen. Aanpassingen in bepaalde opgaven zal naar verwachting tot meer succes leiden, maar dit zal opnieuw moeten worden onderzocht. Daarnaast is het bij de introductie van essentiële begrippen (basis en hoogte), die ondergeschikt zijn aan het ontdekken van de wetmatigheid, van belang om deze sneller expliciet te maken. Dat voorkomt misconcepties of een verkeerde inzet ervan. Daarin mag in het lesmateriaal ook worden gestuurd.

Het toepassen van empirische kennis (E4) en het zelfstandig expliciteren (E5a) waren fasen die weinig belemmeringen kenden. Voor het zelfstandig expliciteren kan in het materiaal uitvoeriger worden stilgestaan bij de probleemaanpak. In het lesmateriaal hebben leerlingen vaak alleen de formule opgeschreven. Verdieping kan plaatsvinden via vragen als: "Waar moet je opletten bij...?", "Waar kijk je als eerste naar?", "Waar moet je naar kijken bij het oplossen van opgaven zoals...?". Er kan ook voor worden gekozen om dit bij E5b meer aandacht te geven. In de lessen is tijdens het klassikaal expliciteren veel aandacht gegeven aan het 'weten waarom'. De leerlingen zijn daar wisselend bij betrokken door bijvoorbeeld het idee van een ander groepje toe te moeten lichten of door veel verschillende leerlingen aan het woord te laten. Tijdens E5b mag er echter ook meer aandacht zijn voor de probleemaanpak, voor het 'weten hoe'. Aan het 'weten hoe' kan klassikaal aandacht gegeven worden door variërende voorbeelden te bespreken. Daardoor krijgen leerlingen meer feedback op hun oplossingsstrategie. In de lessen van dit onderzoek kreeg dit te weinig aandacht, terwijl leerlingen aangeven daar onzeker over te zijn. Dat betekent dat bij het expliciteren niet alleen de ontdekte wetmatigheid wordt uitgewisseld en wordt toegelicht, maar de toepassing ervan ook wordt belicht. Dan zal het consolideren van de eindcompetenties (E6) naar verwachting ook succesvoller verlopen. Leerlingen hebben dan meer ondersteuning gekregen waar ze bij uitdagende toepassingsopgaven op terug kunnen vallen. Daar worden ze beter op voorbereid. Ook zou er meer tijd in de les voor deze toepassingsopgaven moeten zijn, zodat leerlingen er bij het maken van die opgaven niet alleen voor staan: zij hebben nog klasgenoten en de docent die zij om hulp kunnen vragen. Die tijd kan gewonnen worden door tijdbesparende keuzes te maken tijdens E1 en E3.

Deelvraag 3: In hoeverre worden over de hele lessenserie effecten zichtbaar m.b.t.: de prestaties van leerlingen, werken aan 'weten waarom', activeren van leerlingen en motivatie van leerlingen?

Over de prestaties van leerlingen kunnen geen harde uitspraken worden gedaan. Er is geen controlegroep betrokken geweest bij dit onderzoek. Daarnaast zijn de gemaakte proefwerken door verschillende docenten gecorrigeerd. Uit gesprekken met collega's blijkt in ieder geval wel dat het

gemiddelde cijfer van deze klas voor het proefwerk bij dit onderwerp vergelijkbaar is met die van andere klassen. Toch maakt deze klas veel fouten op een aantal toepassingen die in het boek meer aandacht krijgen dan in het ontworpen lesmateriaal (verschillende basissen bij eenzelfde parallellogram/driehoek, en oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek). De resultaten van de onderzoeksgroep zijn verder niet opvallend afwijkend van de andere klassen. Het leerresultaat van de lessen lijkt niet onvoldoende te zijn.

Over het 'weten waarom' valt te zeggen dat de docent bij het volgen van het 6E-model gestimuleerd wordt om 'weten waarom' vragen te stellen. Ook blijkt uit de bevraging van leerlingen dat de geruime meerderheid het waarom achter de ontdekte formules denkt uit te kunnen leggen. Uit de vragenlijst komen enigszins wisselende verdelingen bij eenzelfde thema, maar de meerderheid van de leerlingen geeft aan te weten welke stappen moeten worden gezet, en waarom die stappen moeten worden gezet. Een leerling in het interview verwoordde het treffend toen hij vertelde over de verdeling in stappen en aangaf dat je steeds iets meer te weten kwam en het zelf ontdekte. Hij ging daardoor makkelijker door de opgaven dan in het boek. Een andere geïnterviewde leerling gaf ook aan meer structuur in de lesstof te ervaren, en het duidelijker te vinden dan in het gewone boek, wat kan betekenen dat ze het op deze manier sneller begrijpen.

19 van de 28 hebben aangegeven dat zij bij deze manier van lesgeven meer moesten nadenken. Zij ervaren dus dat ze qua denken meer worden geactiveerd. Daarnaast geeft 16 van de 28 aan de 6E-lessen niet moeilijker vinden dan de lessen met het boek. Het is dus niet per se zo dat meer nadenken door leerlingen direct ook als moeilijker wordt bestempeld. Toch geeft de meerderheid (17 van de 28 leerlingen) aan deze manier van wiskunde krijgen niet leerzamer te vinden dan met het boek. Ze leren natuurlijk ook dezelfde stof, maar op een andere manier, dus wellicht bestempelen ze het als even leerzaam.

Wat betreft de motivatie zijn de leerlingen erg verdeeld. De helft van de klas zou graag vaker op deze manier wiskunde krijgen en de andere helft niet. Uit de interviews blijkt dat aan die waardering van de lessen ook het samenwerken vastzit. Sommige leerlingen hebben het samenwerken in de groepjes niet prettig gevonden en nemen dat mee in de uitspraken over het leuk vinden van de lessen. Dat is ook logisch, want het samenwerken is een belangrijk onderdeel geweest van de manier van lesgeven. Uit de interviews blijkt ook dat leerlingen het verschillend ervaren: de zwakke leerling geeft aan dat ze bij de opgavenbladen er beter achter kwam of ze het echt snapte. De sterke leerling gaf aan het boek fijner te vinden omdat daar staat hoe het moet. Hij had tijdens de 6E-lessen juist niet het idee dat hij het ontdekte, omdat hij niet wist of zijn idee goed was. Daar kreeg hij geen feedback op. De waardering voor specifieke opdrachten was ook zeer wisselend. Zo vond een geïnterviewde leerling de opdrachten leuker dan in het boek, waarbij hij als voorbeeld de lastige exploreeropdracht van les 4 gaf. Hij moest daar echt goed nadenken om erachter te komen. Dat motiveerde hem. Andere leerlingen raken daar juist niet van gemotiveerd. Het is een kwestie van doorzetten en het zelf ook willen uitpluizen, het zelf willen proberen, en niet direct opgeven. Die houding is per leerling wisselend. De conclusie uit dit voorgaande is dan ook dat er wat betreft motivatie veel verschillen zijn. Om aan de verschillen tussen leerlingen tegemoet te komen, is het van belang afwisseling in lessen aan te brengen. Dat kan door een les of een lessenserie te ontwerpen en uit te voeren volgens het 6E-model, en het onderwerp *Oppervlakte* is daar geschikt voor.

8 Discussie

In dit hoofdstuk worden de voorbereiding, uitvoering en verslaglegging van het onderzoek kritisch bekeken. Dit hoofdstuk bevat daarmee de discussiepunten die bij het onderzoek naar voren zijn gekomen.

Een eerste discussiepunt gaat om het karakter van dit onderzoek: het betreft een experiment, waarbij ten opzichte van de normale lessituatie veel zaken tegelijk veranderd zijn, bijvoorbeeld de wijze van samenwerken van leerlingen of het type en de mate van feedback die leerlingen tot hun beschikking hebben. Deze omstandigheden waar leerlingen niet aan gewend zijn, hebben een invloed op de resultaten van het onderzoek gehad.

Een ander belangrijk discussiepunt betreft de beoordeling van een uitgevoerde fase van het 6E-model via het toekennen van een kleur (groen/oranje/rood) aan die fase. Bij die beoordeling is de overzichtskaart (bijlage 1) gebruikt. De suggesties daaruit zijn bij het analyseren in gedacht gehouden. Het geven van een kleur is niet objectief te noemen, aangezien de werkwijze daarvan niet vooraf is vastgelegd en verantwoord. De vraag is ook in hoeverre dat mogelijk is. De beoordeling is desondanks geprobeerd inzichtelijk te maken door kenmerken van de uitgevoerde fase en gebreken te benoemen. Daarin is vervolgens door de onderzoeker een afweging gemaakt.

Verder is het analyseren van de data alleen door de onderzoeker gedaan. Bij het beoordelen van de opgavenbladen is bijvoorbeeld niet een andere persoon ingeschakeld, evenals bij het analyseren van het proefwerk. Daardoor kan het zijn dat het analyseproces systematisch door de onderzoeker onbewust is beïnvloed. De onderzoeker heeft dit willen opvangen door bij de opmerkingen over de uitwerkingen aan te geven welke als goed en als fout zijn beoordeeld. Die beoordeling is daarmee geprobeerd inzichtelijk te maken.

Achteraf gezien waren de observanten in het lokaal, die de interactie letterlijk vastlegden, niet nodig. De gesprekken waren op de video-opnames namelijk goed te volgen. Bij het analyseren van die video-opname zijn instrument 1 en 2 gebruikt. Bij instrument 2 zijn de vragen die zijn gesteld gecategoriseerd naar 'weten dat', 'weten hoe' en 'weten waarom'. Bij die categorisering zijn wederom geen andere personen betrokken geweest. Ook is vooraf niet duidelijk aangegeven wat met die informatie zou worden gedaan en hoe dit zou worden gepresenteerd bij de resultaten. Er is alleen aangegeven dat daarmee iets gezegd kan worden over de mate waarin de leerlingen aan het denken worden gezet. Dit is een bijzaak geweest in dit onderzoek. Wel is eruit gehaald dat de docent bij E2 snel overging op sturende 'weten dat' vragen, waardoor de leerlingen minder geprikkeld werden om zelf na te denken over een afbeelding. Ook bleek dat 'weten waarom' bij E5b altijd terugkwam, maar dat aan 'weten hoe' in de lessen te weinig aandacht is besteed.

De vragenlijst bevatte een stelling waarvan de onderzoeker het idee heeft dat de leerlingen deze niet hebben begrepen. Over de inhoud van de vragenlijst kan gediscussieerd worden: zijn de stellingen te weinig concreet? Er zijn ook drie leerlingen geïnterviewd, en de selectie daarvoor is vrijwel alleen gemaakt op basis van het niveau van de leerlingen. Zijn die drie leerlingen representatief genoeg voor de ervaringen van de hele klas? De onderzoeker is in ieder geval tevreden met de informatie die gehaald is uit het bevragen van leerlingen: de resultaten uit de vragenlijst en uit het interview geven samen een breed en nuttig beeld van de ervaringen van de leerlingen.

Voor dit onderzoek naar de toepassing van het 6E-model bij één hoofdstuk is nieuw materiaal ontwikkeld waar nog hiaten in zaten. Bijvoorbeeld dat in E3 soms te weinig gestuurd wordt. De onderzoeker gelooft dat die hiaten eruit kunnen worden gehaald, zodat effectievere lessen ontstaan. Om daar uitspraken over te kunnen doen, moeten die lessen weer worden uitgevoerd. Zeker voor de les van de oppervlakte van een cirkel is de vraag of het aanpassen van het materiaal voldoende is om leerlingen zelfstandiger te laten ontdekken.

Ten slotte is het onderzoek uitgevoerd bij één klas en door één docent, een vrij beperkte onderzoeksgroep. De onderzoeker heeft in het omschrijven van de bevindingen zo goed als mogelijk getracht aan te geven uit welke resultaten die voortkomen. De onderzoeker gelooft in de betrouwbaarheid van die resultaten.

9 Reflectie

In dit hoofdstuk kijk ik terug op het onderzoeksproces: wat heb ik geleerd met betrekking tot onderzoeksvaardigheden?

Het onderzoek begon met het kiezen van een onderwerp. Al snel wist ik dat het iets vakdidactisch zou worden, aangezien ik me meer vakdidactisch wilde verdiepen, voordat ik de HAN ga verlaten. Enkele onderwerpen zijn op de HAN voorgedragen. Het 6E-model was er daar een van en sprak me onder andere aan, omdat ik het idee had dat het duidelijke kaders biedt voor de onderzoeker.

Het zoeken naar kaders en het vinden van een succesvol pad tijdens het onderzoeksproces is iets wat me toch veel energie heeft gekost, vooral in het begin van het onderzoek. De verwachtingen waren niet altijd helder. Dit heeft geleid tot vastlopen, niet weten waar je moet beginnen of niet weten of je werkzaamheden zin hebben voor het vervolg. Daardoor was het vaak moeilijk me te motiveren om aan het onderzoek te werken. Ik kon vaak niet duidelijk aangeven wat ik nou aan het onderzoeken was en waarom. Dat was frustrerend.

De voorjaars- en meivakantie zijn voor een groot deel opgegaan aan het werken aan mijn onderzoek. Wat ik prettig vond, was dat ik in die weken volledig in het onderzoeksonderwerp en het onderzoeksproces opging. Daardoor kon ik meters maken. Het ontwikkelen van lesmateriaal in de voorjaarsvakantie zorgde voor adem. Voor mijn gevoel stapte ik even uit het moeizame proces, en ik kon aan de slag met iets concreets, iets wat ik in de praktijk ging gebruiken. Dit heeft toen geleid tot een goedgekeurd onderzoeksplan. Niet veel later vond de uitvoering plaats. Je hoopt natuurlijk dat alle energie die je erin hebt gestoken dan resulteert in vier perfecte lessen. Sommige lessen brachten een meer tevreden gevoel dan anderen. Perfect waren ze dus niet allemaal, maar ik heb er wel een tevreden gevoel aan over gehouden.

Het afnemen van de interviews was voor mij het meest waardevolle moment. De geïnterviewde leerlingen kwamen met zeer bruikbare informatie, konden de verschillende aspecten van meerdere kanten belichten en konden hun uitspraken goed onderbouwen. Die onderbouwingen waren herkenbaar.

Ik heb tijdens het proces geleerd wat mijn valkuilen zijn en hoe ik meer doelgericht en effectief kan werken aan een onderzoek. Dat betekent vooral dat sommige zaken minder gedetailleerd hoeven te worden uitgewerkt, bijvoorbeeld een theoretisch kader, en dat ik zicht houd op de onderzoeksvragen waar ik antwoord op wil. Door vaker de doorgaande lijn in het onderzoek na te gaan (komt dit logisch voort uit het voorgaande?), houd ik voor mezelf overzicht en ik weet beter welke richting ik op moet. Overzicht houden tijdens het proces was soms dus lastig, maar de voorbeelden van producten van andere studenten hebben me daar van het begin tot het einde veel houvast in gegeven. Ook het bestuderen van het boek *Praktijkonderzoek in de school* heeft me steun gegeven. Met name bij het ontwikkelen van onderzoeksinstrumenten, het verwerken van de data tot resultaten, en het schrijven van de conclusie hielpen de richtlijnen en de praktische voorbeelden uit het boek.

Ik kan dus zeggen dat ik een hele kluif heb gehad aan dit onderzoek. Het heeft me gelukkig wel nieuwe inzichten gebracht op verschillende aspecten, waaronder het doen van een onderzoek. Dat vind ik belangrijk voor mijn toekomst. Ik heb het idee dat de samensmelting van onderzoek en onderwijs alleen maar sterker wordt. De noodzaak en het nut daarvan zie ik als geen ander: kritisch kijken naar de eigen praktijk, ook vanuit theoretisch oogpunt, is de basis van de ontwikkeling die ik heb doorgemaakt tot de docent die ik nu ben.

10 Literatuur

- Boogaart, T. van den, & Konings, T. (2015). *Voorbereiden en ontwikkelen van wiskundeonderwijs: leren effectief lesgeven*. Utrecht: APS
- Bor, M. & Drijvers, P. (2015). Wiskundig denken: a way of life. *Euclides*, 91 (3), 30-32.
- Bor-de Vries, M., & Drijvers, P. (2015). *Handreiking denkactiverende wiskundelessen*. Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.
- Dekker, R. (2015). Proceshulp bij samenwerkend wiskunde leren. *Euclides*, 90 (5), 18-21.
- Donk, C. van der, & Lanen, B. van. (2012). *Praktijkonderzoek in de school* (2^e druk). Bussum: Coutinho
- Doorman, M., Kooij, H. van der, & Mooldijk, A. (2012). Denkactiviteiten, onderzoekend leren en de rol van de docent. *Nieuwe Wiskrant*, 31 (4), 9-11.
- Drijvers, P. (2015a). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT* (oratie). Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen (FI), Universiteit Utrecht.
- Drijvers, P. (Prezentator). (2015b, 7 september). *Wiskundig denken* [Videobestand]. Geraadpleegd op 11 januari 2016, van <https://www.youtube.com/playlist?list=PLck2aTEC9yAlmuHGX6MfNESjOXAKKYOB1>
- Drijvers, P., Streun, A. van, & Zwanenveld, B. (2012). *Handboek wiskundendidactiek*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.
- Ebbens, S., & Ettekoven, S. (2009). *Effectief leren*. Houten: Noordhoff Uitgevers Groningen.
- Ebbens, S., & Ettekoven, S. (2013). *Samenwerkend leren* (3^e druk). Houten: Noordhoff Uitgevers Groningen.
- Faes, T. v., Goris, T., Konings, T., Krabbendam, H., Monquil, A., & Staal, H. (2011). *Het leren van wiskunde*. Utrecht: APS.
- Freudenthal, H. (1979). Oppervlakte – als verschijnsel benaderd. *Wiskrant*, 4 (1), 41-43.
- Helden, H. van, Krabbendam, H. & Konings, T. (2011). *Probleemoplossen en wiskunde: leren effectief lesgeven* (2^e druk). Utrecht: APS.
- Kirschner, P. A., Clark, R. E., & Sweller, J. (2012). Helemaal uitleggen of zelf laten ontdekken? Onderzoek spreekt voor volledig begeleide instructie. *Van 12 tot 18*, november 2012, 15-16. Gedownload op 20 september 2015, van <http://www.beteronderwijsnederland.nl/sites/beteronderwijsnederland.nl/files/14-16.pdf>
- Lagerwerf, B. (2000). *Wiskundeonderwijs in de basisvorming: een didactische ruggesteun voor wiskundedocenten*. Utrecht: APS-wiskunde
- Streun, A. van (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten: implementatie examenprogramma's havo-vwo 2015*. Enschede: SLO nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling
- Veen, T. van der & Wal, J. van der (2012). *Van leertheorie naar onderwijspraktijk* (5^e druk). Houten: Noordhoff Uitgevers Groningen.
- Windels, B. (2012). Het 6E-model, een richtsnoer voor zelfontdekkend wiskundeonderwijs met sterke sturing. *Nieuwe wiskrant* 32(2). 20–26.

11 Bijlagen

Bijlage 1: overzichtskaart van het 6E-model (Windels, 2012)

Overzichtskaart van het 6E-model voor constructivistische instructie

Beschrijving leerstap	Acties van de docent	Acties van de leerlingen
E1 Evalueren van de begincompetenties		
Tijdens deze leerstap worden de leerlingen voorbereid op het leerproces.	- De docent evalueert relevante voorkennis, vaardigheden en attitudes. - De docent herhaalt waar nodig.	De leerlingen rakelen begrippen, concepten en eigenschappen op, die tijdens deze les nuttig zijn.
E2 Engageren		
Tijdens deze leerstap wordt de interesse en het engagement van de leerlingen opgewekt.	- De docent kadert het onderwerp in een realistische of vakoverschrijdende context. - De docent engageert de leerlingen met een uitdagende probleemstelling of een boeiend instapprobleem. - De docent kadert het onderwerp binnen een groter leerstofgeheel of een historische context. - De docent geeft een boeiende demonstratie.	De leerlingen ontdekken een motivatie voor de leerinhouden van deze les.
E3 Exploreren		
Tijdens deze leerstap worden nieuwe begrippen, concepten of eigenschappen aan de hand van concrete voorbeelden onderzocht of ontdekt.	- De docent geeft overdacht gekozen voorbeelden en non-voorbeelden. - De docent verbindt informeel met formeel taalgebruik en introduceert nieuwe terminologie of symbolen. - De docent streeft concrete en visuele voorstelling na, eventueel in een realistische context. - De docent stelt vooral gesloten vragen. - De docent stimuleert coöperatief leren.	- De leerlingen gebruiken eerder verworven kennis en vaardigheden om zelf nieuwe begrippen, concepten of eigenschappen te ontdekken. - De leerlingen classificeren voorbeelden en non-voorbeelden. - De leerlingen ontdekken wetmatigheden of verbanden in de aangereikte voorbeelden. - De leerlingen voeren een positieve interactie.
E4 Empirische kennis toepassen		
Tijdens deze leerstap wordt gecontroleerd of de leerlingen een intuïtieve of empirische contextvrije kennis van de begrippen, concepten of eigenschappen hebben verworven.	- De docent stelt vragen die de leerlingen kunnen oplossen aan de hand van de zopas opgedane intuïtieve ervaringskennis. - De docent stelt vooral halfopen vragen.	- De leerlingen passen ontdekte wetmatigheden en verbanden intuïtief toe in nieuwe concrete en contextvrije voorbeelden. - De leerlingen geven nieuwe voorbeelden van begrippen of nieuwe toepassingen van eigenschappen.
E5 Expliciteren		
Tijdens deze leerstap wordt van begrippen en concepten een definitie gegeven en worden eigenschappen geformuleerd en bewezen.	- De docent stelt vragen opdat de leerlingen de nieuwe begrippen en concepten kunnen definiëren en nieuwe eigenschappen formuleren en bewijzen. - De docent stimuleert het gebruik van formele wiskundetaal.	- De leerlingen antwoorden op waarom-vragen over concrete voorbeelden en formuleren aldus een definitie of eigenschap in hun eigen woorden. - De leerlingen formuleren de ontdekte wetmatigheden, verbanden en structuren in formele wiskundetaal.
E6 Eindcompetenties consolideren		
Tijdens deze leerstap worden de aangeleerde begrippen, concepten en eigenschappen toegepast. De nieuwe kennis en vaardigheden worden ingeoefend.	- De docent kiest oefeningen en (vakoverschrijdende) toepassingen. - De docent stelt zich op als coach. - De docent komt terug op onopgeloste uitdagende probleemstellingen uit de engageerstap E2. - De docent evalueert de leerwinst. - De docent stimuleert coöperatief leren. - De docent differentieert.	- De leerlingen passen de nieuwe begrippen en eigenschappen toe. - De leerlingen brengen het nieuwe onderwerp in verband met andere kennis en vaardigheden. - De leerlingen vertonen zelfredzaamheid en verantwoordelijkheid voor hun eigen leerproces. - De leerlingen evalueren hun eigen leerwinst. - De leerlingen tonen hun leerwinst aan.

© 2008 Bart Windels

Bijlage 2: Uitvoerige theoretische verdieping

Inhoud

- Hoofdstuk 1: Verschillende soorten leren: constructivistisch, probleemoplossend, onderzoekend en zelfontdekkend
- Hoofdstuk 2: Het leren van wiskunde: de werking van het geheugen en wiskunde, doelen van wiskundeonderwijs en evenwicht tussen begrip en vaardigheid
- Hoofdstuk 3: (Wiskunde)didactische theorieën: voordoen-nadoen- oefenen, oriënteren-ontwikkelen-verwerken, leren door voorbeelden en non-voorbeelden, concreet-schematisch-abstract, het EEE-model
- Hoofdstuk 4: Verschillende aspecten van wiskundig denken: probleemoplossen, modelleren en abstraheren
- Hoofdstuk 5: Wiskundige denkactiviteiten
- Hoofdstuk 6: Samenwerkend leren
- Hoofdstuk 7: Differentiatie

1. Verschillende soorten leren: constructivistisch, probleemoplossend, onderzoekend en zelfontdekkend

De in dit hoofdstuk beschreven verschillende soorten van leren hebben o.a. als gemene deler dat de leerling wordt gezien als actief persoon. De afgelopen decennia toont onderzoek overtuigend aan dat leren een activiteit is waarbij je als leerling zelf actief met de stof bezig moet zijn. Dit betekent niet dat de docent niet sturend moet optreden. Onderzoek lijkt te suggereren dat met name bij het vak wiskunde docentsturing nodig is. Het betekent wel dat enkel instructie of veel voordoen geen goede manier van les geven (Boogaart & Konings, 2015). Wat is er zo al geschreven over de verschillende manieren van 'actief' leren?

Constructivistisch leren

Het constructivisme kent een gevarieerde en uitdagende leeromgeving en eigen kennis construeren op basis van interesse en verwondering als leerprincipes (Veen & Wal, 2012, p. 142). Het uitgangspunt betreft het zien van de werkelijkheid als een subjectieve werkelijkheid, die we zelf creëren of construeren met behulp van onze waarneming, taal en ons denken. Kennis is subjectieve kennis. Deze kunnen we veralgemeniseren ofwel intersubjectief maken door met elkaar te communiceren, waardoor we te maken krijgen met sociale kennis, die tot stand komt in sociale interactie (Veen & Wal, 2012). Deze gedeelde kennis is het resultaat van sociale onderhandeling, waarin individuele betekenissen uitgewisseld en getoetst worden. Daarvoor moet plaats ingeruimd worden voor diverse vormen van samenwerkend leren (Veen & Wal, 2012, p. 145). Boogaart & Konings (2015) geven hierop aansluitend aan dat goed gestructureerde samenwerkingsopdrachten een waardevol didactisch instrument zijn (p. 67). Kennis wordt daarbij ook betrouwbaarder wanneer zij intersubjectiever is (Veen & Wal, 2012, p. 148).

De leerling wordt gezien als een actief, zelfstandig en zelfverantwoordelijk persoon. Effectieve verwerking van informatie tot persoonlijke kennis, oftewel leren, veronderstelt activiteit van de leerling zelf. De docent is daarin meer de inhoudelijke begeleider en coach van leer- en denkprocessen, en niet de instructeur of overdrager van kennis (Veen & Wal, 2012, p. 145). De leraar moet aansluiten bij de beginsituatie van de leerlingen en relevante voorkennis activeren en misconstructies corrigeren. De mate waarin we betekenis kunnen verlenen aan informatie hangt namelijk nauw samen met de mate waarin we deze kunnen verbinden met eerder verworven kennis en ervaring. Nieuwe informatie wordt geconfronteerd met en geïnterpreteerd op basis van de aanwezige voorkennis. Wat er uiteindelijk geleerd wordt of kan worden is dus in sterke mate afhankelijk van de kwaliteit en kwantiteit van de voorkennis en de kennisstructuur, de reeds in het langetermijngeheugen opgeslagen kennis (Veen & Wal, 2012).

In 1973 laat de Amerikaanse psycholoog Carl Rogers in zijn boek *leren in vrijheid* aan de hand van voorbeelden zien dat zinvol leren alleen mogelijk is als het initiatief tot leren bij de leerling zelf gelegd wordt. Dan kan persoonlijke verantwoordelijkheid ontstaan en leidt leren tot zichtbare gedragsverandering bij leerlingen. Andere manieren van leren die tegenwoordig in het onderwijs toegepast worden, zoals ontdekkend leren en probleemoplossend leren, bevatten kenmerken van dit *leren in vrijheid* (Veen & Wal, 2012, p. 153). Hieruit blijkt weer dat de hier omschreven verschillende soorten van leren dicht bij elkaar liggen.

Probleemoplossend leren

Door velen wordt probleemoplossen beschouwd als de hoogste, de meest complexe, en de meest gevraagde vaardigheid van de toekomst (Veen & Wal, 2012, p. 194). Probleemoplossen is een belangrijk educatief doel in het schoolprogramma in ieder land, volgens het rapport 'Resultaten Pisa-2003'. Probleemoplossen is een vaardigheid die een basis verschaft om effectief te kunnen deelnemen aan het maatschappelijk verkeer en om persoonlijke activiteiten te kunnen ontplooiën (Helden, Krabbendam & Konings, 2011, p. 9). Uit het rapport 'Resultaten PISA-2003' blijkt dat probleemoplossen het meest samenhangt met wiskunde en vervolgens met leesvaardigheid.

Bij het oplossen van problemen is het van belang dat de leerlingen zich met het aangeboden probleem kunnen identificeren, dat het uitdagend is: leerlingen gaan het als hun probleem zien. Dat bevordert de motivatie. In het probleemoplossend proces dat daarmee begint, liggen veel mogelijkheden om nieuwe inzichten en kennis te laten verwerven en te verbinden met reeds aanwezige kennis (Veen & Wal, 2012). Het is daarbij belangrijk dat het probleem oplosbaar is. Voor het oplossen van een probleem is de gebruikswaarde van kennis ook doorslaggevend. Daarvoor dient kennis geordend te zijn in de cognitieve structuur en het moet frequent worden toegepast in uiteenlopende situaties. Door zijn eigen oplossingsgedrag te confronteren met dat van anderen krijgt de leerling meer inzicht in de effectiviteit ervan. Daarvoor moet een leraar in staat zijn onderscheid te maken tussen oplossingsstrategieën die wel en die niet effectief zijn (Veen & Wal, 2012, p. 205).

Oplossingsmethoden zijn onder te verdelen in algoritmen ('vindregel'), heuristieken ('zoekregel') en algemene denkregels. Deze laatste zijn minder oplossingsgericht, maar kunnen wel structuur geven aan denkprocessen. Heuristieken leer je alleen door oefening. Naast het beschikken over deze oplossingsmethoden is oefening met terugkoppeling over de juistheid van de oplossing een noodzakelijke voorwaarde (Veen & Wal, 2012).

Onderzoekend leren

In Europa is sinds enkele jaren aandacht voor onderzoekend leren: onderwijs met inbreng van en een actieve rol voor leerlingen. Het doel is dat leerlingen beter leren, meer eigenaar van de lesstof zijn, onderzoeksvaardigheden en een onderzoekende houding ontwikkelen en dat docenten beter zicht hebben op de capaciteiten van hun leerlingen en in het onderwijs daar beter op kunnen aansluiten. Dat sluit weer aan bij de wensen van de huidige samenleving die vraagt om vaardigheden als probleemoplossen, in groepen kunnen werken, creativiteit, onderzoeksattitude, flexibiliteit en kritisch burgerschap (Doorman, Kool & Moordijk, 2012, p. 10).

In het hedendaags wiskundeonderwijs is veel aandacht voor de wiskundige ontwikkeling van het individu: voor de ontwikkeling van een onderzoekende houding. Daarvan is weer een van de belangrijkste aspecten dat de leerlingen leren zelfstandig te werken. De leerlingen moeten op den duur zelf in een probleemsituatie de relevante gegevens kunnen vinden, zelf het probleem formuleren, zelf kunnen beslissen wat in deze situatie de handigste aanpak is, en zelf kunnen controleren hoe goed de oplossing is (Lagerwerf, 2000). Hierin komen de raakvlakken van onderzoekend leren met probleemoplossend leren weer terug.

Zelfontdekkend leren

Onder zelfontdekkend leren valt de methode van geleide herontdekking, waarbij de docent een open probleemstelling ontwerpt, die leerlingen uitdaagt de essenties van de leerstof zelf te ontdekken. Daarbij doordenkt de docent vooraf de stappen, die vermoedelijk gezet gaan worden en bedenkt daarbij hulpvragen (Faes et al., 2011, p. 49). Het vinden van een goede probleemstelling en vervolgvragen is een hele kunst, en vraagt een goede voorbereiding. Criteria voor de probleemstelling zijn vooral: ze is uitdagend, activerend en biedt een goede oriëntatie op de leerstof (Faes et al, 2011, p. 50).

2. Het leren van wiskunde: de werking van het geheugen en wiskunde, doelen van wiskundeonderwijs en evenwicht tussen begrip en vaardigheid

De werking van het geheugen en wiskunde

De wiskundendidacticus Van Streun beschrijft de werking van het geheugen in relatie tot het oplossen van wiskundeproblemen (Faes et al., 2011). Hij noemt daarbij uitdrukkelijk het opbouwen van 'rijke betekenisvolle schema's' en 'oefenen moet'. Zo'n betekenisvol schema staat voor overzicht om een efficiënte strategie te kunnen volgen. Het is een netwerk van begrippen dat langzaam wordt opgebouwd in samenhang met elkaar. Daarvoor is het zelf ontdekken van wetmatigheden van belang. Drijvers, Streun en Zwanenveld (2012) zeggen hierop aansluitend dat het koppelen van het waargenomen probleem aan al verworven kennis uit het lange termijngeheugen alleen lukt als die kennis in het langetermijngeheugen geordend is in een samenhangend cognitief schema met goed bereikbare aanknopingspunten. Kennis van experts is georganiseerd in zulke onderling samenhangende schema's en is efficiënt gekoppeld aan typen situaties waarin deze kan worden benut, waardoor het oeropbaar en toepasbaar is.

De opbouw van een cognitief rijk schema vereist een lange leerlijn, waarvan de elementen moeten worden geconsolideerd en onderhouden. In elke fase van het leerproces moet samen met de leerlingen expliciet worden gewerkt aan centrale concepten en overzicht om de samenhang van de kennis en vaardigheden in het geheugen te versterken (Drijvers et al., 2012, p. 20). Dit sluit in het 6E-model aan bij de noodzaak van zowel leerstap E1, evalueren van de begincompetenties (nieuwe kennis koppelen aan voorkennis), als leerstap E5 en E6, expliciteren en eindcompetenties consolideren (centrale concepten helder krijgen en inoefenen).

Doelen van wiskundeonderwijs en evenwicht tussen begrip en vaardigheid

Als wiskundeleraar moet je je ervan bewust zijn dat het gaat om leerlingen te helpen een rijk cognitief schema inclusief het weten waarom te construeren en waar nodig een verstandige heuristische methode (weten hoe) achter de hand te hebben (Drijvers et al., 2012, p. 18). "Weten waarom" en "weten hoe" zijn twee van de componenten van wiskundebekwaamheid die de doelen van wiskundeonderwijs vormen (Drijvers et al., 2012, p. 22):

1. Weten dat: kennis van feiten en begrippen, reproduceren, technieken beheersen.
2. Weten hoe: probleemaanpak, toepassen, onderzoeksvaardigheden.
3. Weten waarom: concepten, abstracties, rijke schema's, argumenteren, overzicht.
4. Weten over weten: reflecteren, monitoren, kennis over je eigen weten en aanpak.
5. Houding: wiskunde leren is leuk, interessant, groei in kennis geeft voldoening, ik kan het.

Parate kennis ('weten dat') helpt om tijdens het oplossen van problemen het werkgeheugen te ontlasten, zodat er meer capaciteit beschikbaar blijft voor het echte probleem. Om dit echte probleem op te lossen is kennis van het type 'weten hoe' nodig. Zonder deze kennis is de toepassing van feiten en begrippen in nieuwe situaties, waarbij geen sprake is van slechts reproductie, niet mogelijk. Onder 'weten hoe' vallen o.a. de toepassing van heuristische methoden en een systematische probleemaanpak (Drijvers et al., 2012). De naam 'weten hoe' is verwarrend. Weten hoe je een algoritme uitvoert, zoals de abc-formule, valt namelijk onder 'weten dat' (Boogaart & Konings, 2015, p. 24). In het leerproces is 'weten hoe' nauw verbonden met 'weten over weten' in de zin dat leerlingen reflecteren op het oplossingsproces. 'Weten over weten' omvat echter meer: het 'leren leren' (Boogaart & Windels, 2015, p. 54).

Over de relatie en de balans tussen begrip ('weten waarom') en vaardigheden ('weten dat'), valt te zeggen dat begrijpen het leren van vaardigheden gemakkelijker maakt. Als vaardigheden zonder begrip worden geleerd, dan blijven het geïsoleerde brokjes kennis. Nieuwe begrippen of vaardigheden kunnen dan niet voortbouwen op een bestaand netwerk aan kennis. Dat leidt ertoe dat leerlingen voor elke kleine variatie in opgaven weer nieuwe oplossingsprocedures moeten leren. Daarnaast is een zeker beheersingsniveau van vaardigheden noodzakelijk is om nieuwe wiskundige begrippen en methoden met begrip te leren en ontwikkelen. Zonder een goede routine stranden leerlingen namelijk

bij het verdiepen van wiskundige ideeën of het oplossen van wiskundige problemen (Drijvers et al., 2012, p. 24). Binnen het 6E-model krijgen zowel begrip als vaardigheden (routine) aandacht, bijvoorbeeld bij het toepassen van empirische kennis (leerstap E4) en het expliciteren (leerstap E5).

'Weten over weten' betreft de kunde om je eigen inzicht en denken te beoordelen, bijvoorbeeld tijdens het oplossen van een probleem: monitoren en reflecteren. Dit type kennis wordt metacognitie genoemd. Vaak uit de metacognitie zich in de vorm van een interne dialoog. Voor het bereiken van een goede kwaliteit van onderwijs en een goede opbrengst is het essentieel dat leerlingen leren reflecteren op hun eigen kennis en aanpak en zelfvertrouwen ontwikkelen. Dit gaat gepaard met het ontwikkelen van een positieve 'houding' ten aanzien van het leren van rekenen en wiskunde. Het kan zelfs voorwaardelijk worden genoemd voor het verwerven van de andere componenten (Drijvers et al., 2012, p. 25). Om een probleem op te lossen, moet je er namelijk aan willen beginnen. Die 'houding' heeft te maken met plezier hebben in de activiteit, het vertrouwen dat je wel wat kunt, de opgekomen interesse enzovoort. Al werkende moet het je eigen probleem worden, wil je er iets van of over leren. Gekoppeld aan het 6E-model sluit dit aan op de noodzaak van leerstap E2, engageren.

Leerlingen zijn in eerste instantie gericht op 'weten dat'. Vakmanschap van de docent betreft vaak het werken aan de andere doelen (Faes et al., 2011, p. 20). Te veel nadruk op het 'weten hoe' of 'weten waarom' is ook weer niet goed, omdat gebrek aan vaardigheid en automatisme het latere leerproces in de weg staat. Het is aan de docent om een juiste balans te vinden (Boogaart & Konings, 2015, p. 25).

Een goede leerstofordening met bijpassende opgaven draagt bij aan kwantitatief goed onderwijs en de vorming van goede cognitieve schema's, maar kan de waarde van de interactie met de leraar niet vervangen. Het is de leraar die samen met leerlingen een goede probleemaanpak ontwikkelt, die doorvraagt naar het waarom, die zelfreflectie stimuleert, hen motiveert, enzovoort. (Drijvers et al., 2012, p. 43). De wiskundeleraar kan de leerlingen door geschikte opdrachten, stimulerende vragen en aangepaste hulp bij het oplossen van problemen een gevoel geven dat zij door zelf te denken verder kunnen komen dan door louter uit het hoofd leren en reproduceren. (Drijvers et al., 2012, p. 342). De functie van de docent bij de verschillende componenten van wiskundebekwaamheid is als volgt (Drijvers et al., 2012, p. 49-50):

1. Weten dat: Selecteren van de kernen (lang niet alles hoeft men paraat te hebben), met inzicht en denksteuntjes onderwijzen, regelmatig onderhouden, norm 100% paraat, individueel oefenen en toetsen bijvoorbeeld met computerprogramma's. Goed te toetsen met pen en papier, korte antwoord vragen of computer. De docent heeft vooral een controlerende en de norm bewakende rol.
2. Weten hoe: Grote opdrachten individueel en in groepjes laten maken, rapporteren over aanpak, verplichte terugblik, lessen trekken voor de volgende keer, een algemene en een persoonsgebonden probleemaanpak laten ontwikkelen. Toetsing door problemen te laten maken, open vraagstellingen, zelfstandig onderzoek. De docent is vooral procesbegeleider.
3. Weten waarom: Overzichten laten maken, samenhangen en abstracties laten zoeken en expliciteren, in toepassingen de onderliggende wiskundige kernen laten opsporen. Toetsen door vragen naar samenhangen, naar uitleg, naar redeneringen, naar zelf te bedenken voorbeelden, kennisgrafieën laten maken enzovoort. De docent is actief in het leiden van het gesprek en de interactie met de groep.
4. Weten over weten: Vanaf de brugklasleerlingen laten rapporteren over de zelf gemaakte fouten, de eigen manier van werken; een eigen spiekboekje laten maken, toetsen laten verbeteren met eigen commentaar, reflectievragen inbouwen. De docent bewaakt dat dit gebeurt en spreekt ook individueel na.
5. Houding: Ruimte geven voor eigen initiatief en eigen producties in geïntegreerde wiskundige activiteiten, onderzoek, profielwerkstukken enzovoort. Zelfvertrouwen bevorderen. De docent inspireert, reflecteert, selecteert geschikte taken, werkt samen met collega's, gaat buurten bij andere vakken voor integratietaken, enzovoort.

3. (Wiskunde)didactische theorieën: voordoen-nadoen- oefenen, oriënteren-ontwikkelen-verwerken, leren door voorbeelden en non-voorbeelden, concreet-schematisch-abstract, het EEE-model

Voordoen-nadoen-oefenen

Voor het leren van wiskunde bestaan verschillende didactische modellen. Bij voordoen-nadoen-oefenen wordt de leerstof in kleine eenheden opgesplitst. Het bestaat uit het voordoen van eenvoudige voorbeelden, het na laten doen onder controle en het oefenen van een reeks analoge sommen opklappend in moeilijkheid. Pluspunten van deze strategie zijn dat leerlingen zelf snel aan de slag kunnen, snel succes kunnen behalen, dat de aanpak goed werkt op korte termijn en eenvoudig is te toetsen. Minpunten zijn dat leerlingen alleen dat specifieke type opgaven leren maken (alleen reproductie), dat sprake is van fragmentarisering zonder samenhang, dat elk nieuw type opgave een nieuw leerproces vereist en dat ze leidt tot klakkeloos instampen (Drijvers et al., 2012, p. 44; Faes et al., 2011, p. 76). Er wordt dus meer gewerkt aan vaardigheid dan aan begrip. Op beperkte schaal is deze strategie nog steeds bruikbaar als onderdeel van een leerproces, waarin oefenen moet. Er moet dan wel worden toegezien op het minimaliseren van de bovengenoemde minpunten (Faes et al., 2011).

Oriënteren-ontwikkelen-verwerken

Bij oriënteren – ontwikkelen – verwerken staat het leren van voorbeelden en non-voorbeelden centraal. De leerling haalt het relevante cognitieve schema naar boven, en leert het doel, het probleem en de werkwijze kennen. Daarna vindt het expliciteren van het geleerde plaats, bijvoorbeeld via het sorteren van voorbeelden en non-voorbeelden. Als de leerling het nieuwe begrip kent en begrijpt, gaat hij oefenen en hij past het probleem toe op nieuwe problemen (Drijvers et al., 2012; Faes et al., 2011). De fasen van dit model zijn ook terug te vinden in het 6E-model: de eerste twee fasen betreffen het oriënteren, de laatste fase betreft het verwerken, en daartussen vindt het ontwikkelen plaats. Oriënteren – ontwikkelen – verwerken schept zowel routine als inzicht. Leerlingen leren zelf voorbeelden te classificeren en komen zo tot abstractie (Drijvers et al., 2012, p. 45).

In schoolboeken herken je het model terug in de type opgaven: oriëntatieopgaven leveren een eerste beeld op van wat geleerd gaat worden. In ontwikkelopgaven wordt een schematiseringsstap van concreet naar abstract gezet, of er wordt een conclusie of wiskundige kern voorbereid of ontdekt. Verwerkingsopgaven zijn representatief voor wat er geleerd moet worden (Boogaart & Konings, 2015, p. 48).

Leren door voorbeelden en non-voorbeelden

Door naast voorbeelden dingen op te voeren die net geen voorbeeld zijn, worden de grenzen duidelijker. Naast de voorbeelden zijn dus ook de non-voorbeelden belangrijk. Ze lijken op voorbeelden, maar zijn het net niet (Lagerwerf, 2000, p. 98).

Het leren van voorbeelden en non-voorbeelden kan de ontwikkeling van samenhangende, betekenisrijke, cognitieve schema's stimuleren. Drijvers et al. (2012) verwijzen naar publicaties van Skemp, Van Dormolen en Landa (p. 38):

Skemp (1971) en Van Dormolen (1974) stellen dat een nieuw concept of principe alleen adequaat kan worden geleerd door het onderzoeken van een geschikte verzameling van voorbeelden en non-voorbeelden. [...] Landa (1991) betwijfelt of een correcte definitie en een gezamenlijke reflectie op die definitie en op voorbeelden en non-voorbeelden, de zogenaamde empirische generalisatie, wel tot een juist begrip leiden. Bij meer complexe begrippen is deze strategie slecht uitvoerbaar vanwege het grote aantal variabelen waarmee rekening moet worden gehouden. Hij bepleit een vorm van cognitief begeleid, ontdekkend leren, waarin de opdrachten goed gestructureerd leiden naar de explicitering van de generalisatie of abstractie. Landa benadrukt dat na de verkenning en definitie de mentale operatie van het identificeren van een begrip op basis van de kenmerken centraal moet staan.

Faes et al. (2011) zetten het leren van begrippen door voorbeelden tegenover het leren door definitie. Daarbij kost het leren door definitie, waarbij eerst een definitie wordt gegeven en deze vervolgens dient te worden toegepast op een aantal voorbeelden, weinig tijd. Leren door voorbeelden, waarbij eerst een paar voorbeelden worden gegeven waarna leerlingen nieuwe voorbeelden en een definitie proberen te bedenken, kost veel tijd, maar leerlingen zijn daarbij wel actiever en het proces is indringender. Bij het leren door voorbeelden geeft de docent vooral non-voorbeelden of bijna-voorbeelden (Faes et al., 2011, p. 35). Het leren van voorbeelden speelt een belangrijke rol in het proces van abstractie. Door de aandacht voor de overeenkomsten worden begrippen van een hogere orde opgebouwd, ofwel geabstraheerd. In het 6E-model wordt leren via voorbeelden ingezet, en niet het leren door definitie. De leerling wordt geactiveerd om na gepresenteerde voorbeelden en non-voorbeelden zelf deze definitie te geven, dus te expliciteren.

De strategie van leren door voorbeelden is herkenbaar aan enkele of meerdere van de volgende kenmerken (Faes et al, 2011, p. 38):

1. Eerst de voorbeelden, dan de regel of definitie
2. Breng de leerling in actie
3. Eenvoudig beginnen
4. Ook non-voorbeelden
5. Voldoende voorbeelden
6. Voldoende variatie
7. Ook voorbeelden van de leerling
8. Ook extreme voorbeelden
9. Praktijkvoorbeelden

Van Dormolen spreekt over de OSAEV-strategie (Faes et al., 2011, p. 38) die de volgende fasering kent en waar het leren van voorbeelden in terugkomt:

1. Oriënteren, op wat je gaat leren
2. Sorteren, van voorbeelden en non-voorbeelden
3. Abstractie controleren, door leerlingen te vragen naar nieuwe voorbeelden
4. Expliciteren, door ondubbelzinnig verwoorden van een definitie
5. Verwerken, door oefenen en toepassen

Windels (2012) geeft aan dat het 6E-model in vergelijking met dit OSAEV-model een concrete en voor docenten meer transparante overgang van het concrete naar het abstracte beschrijft (leerstap E4, empirische kennis toepassen), meer stimuleert tot leerlinggerichte en activerende werkvormen en meer focust op het engageren van de leerling. Ook geeft het 6E-model aan welke leerstappen wel of juist niet in een realistische context dienen te worden geplaatst. Voor het engageren van de leerling geeft Windels in zijn steekkaart wat voorbeelden voor geeft. Dit 'instappen' in nieuwe leerstof kan o.a. door leerlingen in situaties te brengen, die ze kunnen invoelen, overzien, herkennen en waardoor ze nieuwsgierig en weetgierig worden. Het kan een gesprekje zijn met de leerlingen over de context van een eerste probleem, het stellen van een prikkelende vraag of het vertellen van een verhaal (Faes et al., 2011). Daarbij is een instapprobleem een probleem dat:

- Uitdaagt, nieuwsgierigheid opwekt;
- Aanleiding is tot actief bezig zijn;
- Tot een herkenbare context behoort;
- Een aanzet geeft tot de volgende wiskundestof;
- Niet te ingewikkeld, maar ook niet te gemakkelijk is.

Het is een hele kunst zulke problemen te bedenken, meestal werk voor auteurs van schoolboeken of ervaren leraren.

Concreet-schematisch-abstract

Faes et al. (2011) zeggen dat je wiskunde kunt leren m.b.v. contexten uit de werkelijkheid. Deze gebruik je soms om wiskundige begrippen mee te introduceren en te ontwikkelen, soms om geleerde

kennis te laten toepassen, en soms ook gewoon om de leerlingen te motiveren, om de wiskundeles te verlevendigen (p. 51). Het starten vanuit de context komt terug in de fasering in 'concreet-schematisch-abstract', wat ook wel 'context-model-formeel-fasering' genoemd wordt. Daarbij moeten een aantal keuzen worden gemaakt (Faes et al., 2011):

- Contextfase: de leerling dient vertrouwd te raken met de context. Welke afspraken worden gemaakt? Hoe ziet de handeling in de context eruit? Dit moet je vaak een aantal keren volledig doen. (*de situatie*)
- Schematische/modelfase: in deze fase wordt de context geleidelijk losgelaten. Welke verkortingen moeten doorlopen worden? Vaak horen daar schemaatjes bij. Welke stappen daaruit mogen niet gemist worden om leerlingen tot inzicht te brengen in plaats van tot een onbegrepen truc? In hoeverre laat je (mogelijke foute) ontdekkingen van leerlingen toe? (*tabel, grafiek, schema, getallenlijn, plaatje,...*)
- Abstracte/formele fase: wanneer moet de context losgelaten zijn? Welke verschillen zie je tussen leerlingen? Als een leerling toch fouten maakt: hoever ga je terug in de leerweg concreet-schematisch-abstract? (*regel, formule, principe,...*)

De fase van 'toepassen' kan eigenlijk nog worden toegevoegd: abstractie moet het vervolgens mogelijk maken het geleerde toe te passen op een nieuw probleem of in een nieuwe context (Faes et al., 2011, p. 59).

Aan de contextfase worden bepaalde eisen gesteld. Een context moet namelijk effectief zijn. Als er te veel afleiders zijn, dan kunnen die juist tegenwerken. Criteria voor effectiviteit zijn onder andere (Faes et al., 2011, p. 61):

- Is de context herkenbaar voor alle leerlingen? Is er aansluiting bij de beleavingswereld?
- Is de vertaling van de context naar wiskunde eenvoudig? Welke en hoeveel afspraken moeten gemaakt worden om het model te laten werken?
- Kun je de bij de context behorende wiskundeopgaven volledig in contexttaal uitspreken?
- Is de context bruikbaar door de hele stof? Staat de context goed begrip van de volgende stof in de weg?

Het leren vanuit contexten en modellen is een goede zaak, maar op een gegeven moment is de context en het model niet meer toereikend. Het kan dan zelfs verdere abstrahering in de weg staan (Faes et al., 2011, p. 63).

Het EEE-model

Het EEE-model is een voorloper van het 6E-model en is ook ontwikkeld door Bart Windels van de vrije universiteit Brussel. Het is een didactische werkwijze waarmee je voorkomt dat je 'weten waarom'-kennis negeert, terwijl je wel degelijk aandacht besteedt aan 'weten dat'. De drie E's staan voor drie fases die het 6E-model ook bevat:

- Exploreren: hier verkennen leerlingen het probleem en ontdekken ze verbanden. Als docent stel je hier vooral gesloten vragen: "Is het zo dat...", "Hoe groot is...".
- Empirische kennis toepassen: leerlingen gaan de verbanden gebruiken in andere, wat abstractere, situaties, zonder dat ze al een formele regel hebben geleerd.
- Expliciteren: pas hier wordt een formele regel behandeld. In deze fase stelt de docent open vragen en waaromvragen.

Deze drie fasen kun je vaak toepassen als je nieuwe stof behandelt. Soms gaat het heel snel (5 minuten) en kunnen er meerdere EEE's in een les zitten, maar ook kun je met één EEE meerdere lessen bezig zijn. De essentie is dat je leerlingen niet meteen vertelt hoe het zit, maar dit uitstelt en ze eerst zelf laat nadenken. Schoolboeken doen dit vaak niet (Boogaart & Konings, 2015).

4. Verschillende aspecten van wiskundig denken: probleemoplossen, modelleren en abstraheren

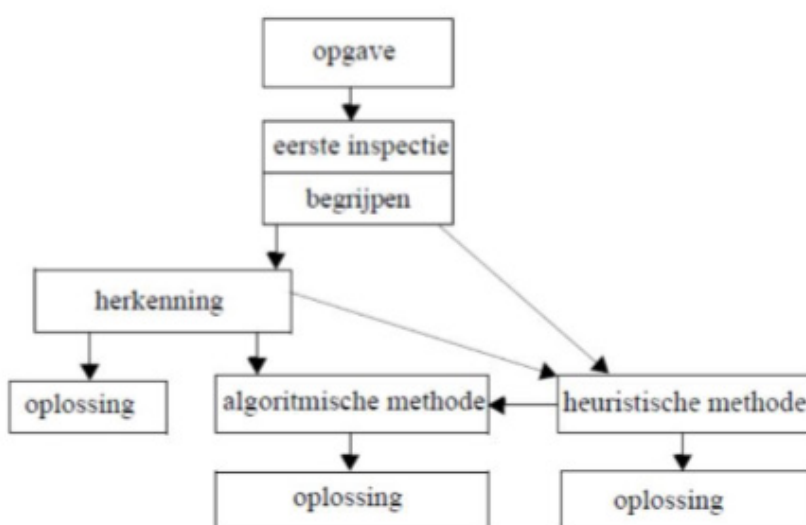


Figuur 3: drie centrale 'hoekpunten' van wiskundig denken (Bor-de Vries & Drijvers, 2015, p. 30)

Probleemoplossen

Beter worden in probleemoplossen is beter worden in wiskunde. Daaruit is het belang van probleemoplossen voor wiskundeonderwijs op te maken. Toch speelt probleemoplossen vaak een ondergeschikte rol in het wiskundeonderwijs. Er wordt onder druk van andere invloeden veel meer gewerkt aan vakkennis dan aan het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden (Helden et al., 2011, p. 10).

Wanneer we het hebben over probleemoplossen, is het belangrijk eerst te weten waarin een probleem zich onderscheidt van een routine-opgave. Bij een routine-opgave wordt van leerlingen verwacht dat ze direct herkennen welke kennis of vaardigheden leidt tot een correct antwoord. Het gaat om het 'weten dat', feitelijke kennis en algoritmische methoden die leerlingen paraat moeten hebben. Bij een probleem kan iemand niet de oplossing onmiddellijk geven of een algoritmische methode vinden. Een probleem vraagt om een analyse van de probleemsituatie en een zoekprocedure (Drijvers et al., 2012). Om een probleem, een niet-standaard opgave, aan te kunnen pakken, is een stevig repertoire aan parate kennis en vaardigheden noodzakelijk (Streun, 2014). Daarmee ontlast je het werkgeheugen. Het verschil wordt verduidelijkt in het volgende schema.



Figuur 4: Schematische weergave van een oplossingsproces (Drijvers et al., 2012, p. 31)

Bij de eerste inspectie zoekt de probleemoplosser in zijn geheugen naar relevante voorkennis en hij kijkt of hij het probleem herkent en er een oplossingsmethode voor weet (Drijvers et al., 2012). Wanneer de leerling ziet waar het nieuwe probleem bij aansluit, dan wilt hij daar gemakkelijker mee aan de slag. Je kunt bij een nieuw probleem zelf aangeven welke oude wiskunde hierbij relevant is, maar je kunt ook in een onderwijsleergesprek met de klas uitzoeken, of het als een individuele opdracht geven (Lagerwerf, 2000, p. 56). Bij de herkenning is de kwaliteit van het op te roepen cognitieve schema essentieel. Zijn er voldoende aanknopingspunten voor de noodzakelijke koppeling tussen de opgave en het langetermijngeheugen? Beheerst de leerling het gemeenschappelijke onderliggende concept in verschillende probleemsituaties? Beschikt de leerling over een overzicht van toepasbare smalle en brede procedures en methoden? De herkenning van wiskundige begrippen in realistische probleemsituaties vraagt daarbij om een vermogen tot abstraheren van wiskundige essenties (Drijvers et al., 2012).

Bij het denken over probleemaanpak bij wiskunde neemt de Amerikaanse wiskundige George Polya een belangrijke plaats in (Helden et al., 2011, p. 19). Polya heeft het proces van probleemoplossen ingedeeld in een viertal fasen (Drijvers, 2015; Bor-de Vries & Drijvers, 2015):

1. Het stellen van het probleem, het probleem begrijpen
2. Een aanpak bedenken
3. Die aanpak uitvoeren en monitoren
4. En terugkijken op het proces om te verifiëren of het doel is bereikt en om de denkstappen te expliciteren.

In praktijk wisselen deze fasen elkaar vaak af. Leerlingen zijn vaak geneigd om de eerste en laatste fase te vergeten, terwijl die bij het leren van nieuwe zaken nu juist zeer essentieel zijn (Helden et al., 2011, p. 20). In bijlage 3 is een overzicht toegevoegd van de aandachtspunten bij probleemoplossen (Helden et al., 2011, p. 113).

Probleemoplossende vaardigheden omvatten heuristieken om met het nieuwe om te gaan, zoals: een schets maken, iets afleiden uit de gegevens, of juist terug redeneren vanuit de gewenste uitkomst, een probleemaanpak bedenken, een randgeval zoeken, een getallenvoorbeeld doorrekenen, een meerstaps strategie uitvoeren zonder de draad kwijt te raken, of weten hoe je zaken die je al kunt of kent in een nieuwe situatie creatief kunt inzetten. Het ontwikkelen en expliciteren van dergelijke heuristieken is een centraal leerdoel van onderwijs in probleemoplossen (Drijvers, 2015; Bor-de Vries & Drijvers, 2015). Bij het probleemoplossen is een repertoire aan heuristieken namelijk onmisbaar (Drijvers et al., 2012).

Modelleren

Modelleren betreft de relaties tussen wiskunde en problemen uit de wereld om ons heen en de manier waarop dergelijke realistische problemen kunnen worden opgelost met wiskundige middelen (Drijvers, 2015). Dit omvat het doorgronden en analyseren van het probleem, het kiezen van variabelen, het opstellen van verbanden, het bepalen van een strategie en het inzetten van wiskundige middelen (Drijvers et al., 2012). Een ander essentieel onderdeel van modelleren is het algebraïseren: het mathematiseren van een realistische of wiskundige situatie door een formule of een vergelijking op te stellen. Volgens Pólya is de belangrijkste specifieke doelstelling van het wiskundeonderwijs leerlingen te leren om een reële situatie te vertalen in wiskundige termen. Zo kunnen leerlingen zelf ervaren dat wiskundige begrippen in verband gebracht kunnen worden met de werkelijkheid (Drijvers et al., 2012, p. 35). In een ruimere opvatting wordt bij modelleren ook gedacht aan het doorlopen van een cyclus van het vertalen van het probleem naar wiskunde, vervolgens het wiskundige probleem oplossen en ten slotte de oplossing terugvertalen naar het oorspronkelijk probleem (Drijvers, 2012; Spandaw & Zwaneveld, 2012). In het wiskundeonderwijs is modelleren om drie redenen van belang. Ten eerste ontleent wiskunde haar bestaansrecht ook aan de toepasbaarheid ervan, die je door middel van wiskundige modellen vormgeeft. Ten tweede draagt modelleren eraan bij dat leerlingen wiskunde als betekenisvol en voorstelbaar ervaren. Ten derde kunnen betekenisvolle wiskundige modellen een aanloop zijn naar abstractere wiskunde (Drijvers, 2015, p. 11-12).

Wanneer leerlingen een model moeten opstellen of aanpassen, kenmerken ervan moeten onderzoeken of verschillende modellen vergelijken zonder dat daarbij het denkwerk uit handen wordt

genomen, is er sprake van modelleren. Vaak bevatten modelleeropgaven een context die naar wiskunde vertaald moet worden. Het is essentieel dat deze context echt of in elk geval geloofwaardig is. Lastig bij het maken van een model is om te besluiten welke informatie nuttig is en welke informatie wordt genegeerd of vereenvoudigd. Leerlingen kunnen dit al ervaren door hen in een opgave overvloedige informatie aan te bieden (Bor-de Vries & Drijvers, 2015, p. 6).

Abstraheren

Abstractie is het wezen en de kracht van wiskunde en maakt het leren en begrijpen van wiskunde gemakkelijker. Leerlingen groeien in hun vermogen abstracties te vatten en zelf te abstraheren. Bij abstraheren gaat het om het doorzien van onderliggende concepten in concrete situaties en omgekeerd om het kunnen vertalen van abstracte notities naar concrete objecten en situaties (Drijvers et al., 2015). De leerling haalt overeenkomsten en verschillen uit concrete probleemsituaties, die vervolgens leiden tot de vorming van betekenisvolle wiskundige objecten met eigenschappen en relaties (Drijvers, 2015). Geleidelijk aan verschuift het accent van het oplossen van de concrete problemen naar het inzicht in en redeneren met de wiskundige begrippen die daarin een rol spelen en waarbij de leerling zich wat kan voorstellen. Daarmee is abstraheren een van de krachtigste aspecten van de wiskunde: je gaat op een hoger niveau redeneren over zaken en verbanden op een manier die nog steeds iets voor je betekent (Drijvers, 2015, p. 13).

In opgaven die aandacht geven aan abstraheren verschuift de aandacht van specifieke gevallen naar het algemene; ze nodigen uit tot generaliseren. In de gebruikte methoden wordt vaak weinig aandacht aan abstraheren besteed, terwijl het juist zo centraal is binnen de wiskunde. Opgaven waarbij leerlingen zelf de theorie kunnen ontdekken, helpen bij het abstraheren. Zo kunnen leerlingen bijvoorbeeld een situatie verkennen met getallenvoorbeelden en hieruit een algemeen geldende conclusie afleiden. De docent kan leerlingen aan de hand van een aantal (non-)voorbeelden op zoek gaan naar een patroon of een algemene regel. Ook kun je verschillende situaties voorleggen en leerlingen een wiskundig concept of methode laten vormen. Deze processen zijn niet eenvoudig en niet elke leerling zal hier ook zelfstandig toe in staat zijn. Daarom is het belangrijk om hieraan regelmatig klassikaal aandacht te besteden (Bor-de Vries & Drijvers, 2015, 2015, p. 7).

5. Wiskundige denkactiviteiten

Wiskundig denken kan worden ontwikkeld en gestimuleerd aan de hand van problemen (Drijvers et al., 2012). Wanneer er wordt gesproken over wiskundige denkactiviteiten ontstaat de vraag: wat verstaan we onder wiskundig denken? Drijvers (2015) geeft de volgende definitie:

Wiskundig denken is bedenken hoe je wiskundig gereedschap kunt gebruiken om een probleem aan te pakken.

Drijvers (2015) licht deze definitie verder toe. Een belangrijk aspect daarvan is zijn omschrijving van een "probleem": een vraag waarvoor de leerling nog geen kant-en-klare oplossingsmethode ter beschikking heeft, een niet-standaard opgave van binnen of buiten de wiskunde, die de leerling (nog) niet routinematig kan oplossen. Leerlingen die getraind zijn op het maken van alleen enkelvoudige routineopgaven komen niet verder (Drijvers et al., 2012, p.14). Een opgave die wel aanzet tot wiskundig denken doet een beroep op de verschillende aspecten van wiskundig denken, zoals eerder omschreven: de leerling leert om problemen op te lossen, te modelleren of te abstraheren (Bor-de Vries & Drijvers, 2015, p. 6).

Streun (2014) benoemt probleemoplossen en abstraheren als de twee hoofdlijnen van het gehele complex van wiskundige denkactiviteiten. Het kunnen probleemoplossen is wel noodzakelijk maar lang niet altijd voldoende voor het adequaat aanpakken en oplossen van een ervaren probleem. In veel situaties is het nodig om de 'diepte' in te gaan door terug te grijpen op het onderliggende wiskundige concept. Dat noemden we abstraheren.

Handvatten die worden gegeven voor het (her)ontwerpen van opgaven die aanzetten tot wiskundig denken zijn (Bor-de Vries & Drijvers, 2015):

- Verander een gesloten vraag in een open probleem. Dit kan door bijvoorbeeld deelvragen weg te laten en alleen de hoofdvraag te stellen of door gegevens weg te laten of juist toe te voegen.
- Zorg ervoor dat leerlingen een opgave op verschillende manieren kunnen aanpakken en daarbij zelfs misschien verschillende antwoorden krijgen.
- Schuif een opgave naar voren. Kies een uitdagende opgave die alle theorie omvat die je aan wilt leren en begin daarmee. Laat leerlingen zelf puzzelen en uitproberen om zo (met elkaar) de theorie te ontdekken of zich minstens goed te realiseren welke kennis nog ontbreekt.
- Maak het zelf formuleren van de opgave tot onderdeel van het probleem. Dat werkt vaak motiverend.
- Laat leerlingen aan het begin van de opgave een voorspelling doen of vraag een schatting van de uitkomst van de opgave.
- Selecteer een opgave waarbij sprake is van een cognitief conflict, bijvoorbeeld een paradox. Dit werkt motiverend.
- Laat leerlingen voor de variatie iets in elkaar zetten, zoals een verslag of een presentatie.
- Stel een omkeervraag: "Dit is het antwoord, wat was de vraag?"
- Varieer regelmatig in werkvorm. Laat leerlingen bijvoorbeeld kaartjes categoriseren, drogredeneringen ontkrachten of zelf een (toets)opgave bedenken.

Daar kan nog het volgende aan worden toegevoegd (Bor & Drijvers, 2015): het benadrukken van hetgeen dat interessant is, bijvoorbeeld een conflict tussen intuïtieve kennis en wiskundige kennis of het stellen van waaromvragen. Bogaart & Konings (2015) benoemen dat met name opdrachten die twijfel zaaien, waarbij verschillende partijen in de klas verschillende meningen hebben, uitdagend zijn (p. 59).

Open vragen, punt 1, maken het mogelijk dat leerlingen de gelegenheid krijgen zelf een oplossing te bedenken. Wat ze zelf ontwikkelen is daarbij beter bruikbaar en beklijft beter. Doordat er verschillende wegen openstaan kan elke leerling zoeken naar een oplossing op zijn of haar niveau. Dat komt het leerproces ten goede en het maakt de kans op succes voor de leerlingen groter. Open problemen

vragen van de leerlingen een speciale werkhouding. Ze moeten meer initiatief kunnen nemen, zelfstandiger kunnen optreden. Ze moeten een onderzoekende houding ontwikkelen (Lagerwerf, 2000, p. 50).

In het artikel *Wiskundig denken: a way of life* geven Bor & Drijvers (2015) nog de volgende lijstjes voor respectievelijk een opgave en de docent die het denken actiever maken:

De ideale wiskundeopgave:

- Gaat over hoe én waarom;
- Is een aansprekend probleem voor de leerling;
- Heeft iets te bieden voor zowel de sterke als de zwakke leerling;
- Kan op verschillende manieren worden aangepakt;
- Is origineel of verrassend;
- Vereist meerdere denkstappen;
- Is open en niet te sturend;
- Leent zich voor discussie tussen leerlingen of in de hele klas;
- Zet aan tot terugkijken en reflectie;
- Nodigt uit tot verder denken en vervolgvragen.

De ideale denkactiverende wiskundedocent:

- Geeft geen antwoorden, maar stelt vragen;
- Geeft leerlingen denktijd;
- Vraagt door op reacties van leerlingen;
- Heeft zelf plezier in wiskundig denken;
- Bedenkt bij het voorbereiden van de les op welke manier hij het denken kan activeren;
- Besteedt aandacht aan het oplossingsproces;
- Reflecteert met de hele klas op de gebruikte strategieën;
- Bouwt de hoeveelheid hulp in de loop van de tijd af;
- Geeft het wiskundig denken ook een plaats in de toets;
- Is doorlopend alert op kansen om leerlingen aan te zetten tot wiskundig denken.

In alle deelgebieden van de wiskunde is sprake van analytisch denken en probleem oplossen. De meetkunde is vanouds een terrein waarin van deze vorm van wiskundig denken in het onderwijs veel werk wordt gemaakt (Drijvers et al., 2012, p. 358). Bogaart & Konings (2015) geven als didactische aanwijzingen bij meetkunde:

1. Rijke ervaringen zijn van meer belang dan veel sommen maken. De docent moet nog wel zelf op zoek naar concreet materiaal, applets en opdrachten
2. Vraagstellingen die aansluiten bij de (dagelijkse) ervaring van de leerlingen
3. Gebruik concreet materiaal, als startpunt, en als steun onderweg, als model voor andere begrippen.

(p.65)

Bij de invloed van de docent op het stimuleren van wiskundig denken onderscheiden we: coachen van leerlingen, leerlingen (laten) reflecteren op en expliciteren van denkmethoden en leerlingen leren hun eigen aanpak te monitoren (Drijvers et al., 2012, p. 347). Bij de rol van de leraar bij probleemoplossen verwijzen Drijvers et al. (2012) naar publicaties van Anderson die het belang benadrukt om leerlingen te helpen als zij niet op eigen kracht een opdracht tot een goed einde kunnen brengen. De leraar of een medeleerling assisteert op zo'n manier dat de leerling zelf de opdracht kan afmaken. Essentieel is dat de hulp niet de complexiteit of de cognitieve uitdaging van de opdracht te veel reduceert. Verder moeten de leerlingen worden gestimuleerd zichzelf te monitoren: hoe staat het met de voortgang van het oplossingsproces. Dit weten over weten kan het vertrouwen van leerlingen in de eigen competenties versterken, evenals hun motivatie om actief te participeren in opdrachten van hoog niveau.

Helden et al. (2011) noemen als belangrijkste leraarsvaardigheden bij probleemoplossen: gevoelens van leerlingen accepteren, terughoudend zijn, de handen op de rug (en geen pen bij je), leerlingen helpen met en stimuleren tot terugblikken (p. 115).

Lagerwerf (2000) benoemt drie manieren van houvast geven aan wat al geleerd is: hulp bij de inhoud, hulp bij de manier van werken, en klankbord zijn (in eigen woorden herhalen wat de leerling zegt). Het is de kunst in dit opzicht voldoende variatie aan te brengen in je manier van helpen. Dat helpt de leerlingen hun probleemoplossend vermogen te vergroten.

Aansluitend op de rol van de docent bij wiskundig denken, geven Bor-de Vries & Drijvers (2015) tips voor het begeleiden: Stuur erop aan dat leerlingen denkstappen en strategieën expliciet verwoorden. Vraag naar het hoe en waarom in plaats van naar het wat. Waardeer vooral de methode en aanpak van leerlingen boven de uitkomst of het antwoord. Moedig hen aan om denkstappen te benoemen, om argumenten te geven, om de procedure uit te leggen en op te schrijven. Moedig leerlingen aan om zelf greep te houden op het oplossingsproces, op de grote lijn, en om zelf de voortgang te monitoren. Dat kan bijvoorbeeld door vragen te stellen als “Waar ben je mee bezig?” en “Waar wil je ook al weer heen?” Bij dit monitoren van de voortgang hoort natuurlijk ook het terugkijken en controleren: “Klopt wat je nu gevonden hebt met de gegevens?” en “Waarom wil je dit nu ook al weer weten?”. Als leerlingen een tijd aan een probleem hebben gewerkt, is een klassikale nabespreking heel belangrijk voor het vastleggen van wat is geleerd en het reflecteren op de opgave. Besteed daarin vooral aandacht aan de verschillende strategieën die mogelijk zijn en aan de stappen in de probleemaanpak die cruciaal zijn bij het oplossen. Welke gedachten gaven de doorslag? Hoe had je daar op kunnen komen? Laat leerlingen met originele methoden aan het woord. Aandacht voor dergelijke punten kan ertoe leiden dat leerlingen een volgende keer beter zijn toegerust om zichzelf in een proces van wiskundig denken te storten.

De ideeën achter wiskundige denkactiviteiten staan dicht bij de doelstellingen van onderzoekend leren. Kleine ingrepen in de dagelijkse lespraktijk aan de hand van het gebruikelijke boek kunnen al bijdragen (Doorman et al., 2012, p. 9). Verder is de manier waarop we vragen stellen aan leerlingen van belang (Doorman et al., 2012, p. 11):

- Geen vingers, geef iedereen tijd om zelf te denken.
- Geef iedereen voldoende denktijd.
- Vraag door op reacties van leerlingen, laat andere leerlingen met een antwoord verder gaan, laat anderen verduidelijken of samenvatten.
- Gebruik werkvormen als denken, delen, uitwisselen.

Eerder zijn de begrippen probleemoplossen, modelleren en abstraheren al uitgewerkt. Vanuit die aspecten van wiskunde heeft Drijvers (2015, p. 16) criteria opgesteld voor een opgave die wiskundelessen denkactiever maakt. Met het oog op probleemoplossen is het bijvoorbeeld goed als een opgave een verrassingselement heeft, iets dat de leerling niet verwacht en dat de opgave daarmee boeiend maakt. Vanuit het perspectief van modelleren kan een criterium zijn dat de leerling kwalitatief over een model moet nadenken of dat eigenschappen van het type model onderzocht worden. Een criterium met betrekking tot abstraheren kan zijn dat op basis van verschillende situaties een wiskundig concept of methode wordt gevormd. Vanzelfsprekend hoeft een opgave niet aan alle criteria te voldoen om geschikt te zijn.

Bij een begin aan nieuwe leerstof via een instaprobleem moet de aangeboden opdracht niet alleen binnen het bereik van de leerlingen liggen maar ook hun interesse wekken, zodat zij al doende gemotiveerd worden om er stevig mee aan de slag te gaan. Een goed gekozen instapopdracht oriënteert de leerlingen op een probleemaanpak zonder veel voorkennis en tegelijk krijgen ze een idee over de concepten en methoden waar het in de komende lessen over zal gaan (Drijvers et al., 2012, p. 349). Een half uur interactief met goede voorbeelden instappen, levert meer op dan twee lessen opgaven doorwerken. Veel van die opgaven kunnen dan worden geschrapt. Na een geslaagde instap ga je op weg naar het onderliggende concept, en vervolgens naar de abstractie die het leerlingen mogelijk maakt het onderwerp zelf te doorzien (Drijvers et al., 2012, p. 351).

6. Samenwerkend leren

Wiskunde is geen vak meer voor individualisten: in het hedendaags wiskundeonderwijs wordt veel samengewerkt. Samenwerken leidt tot praten over de aanpak en tot verantwoorden van de gekozen oplossingsmethoden en van de resultaten. Dit komt de kwaliteit van het werk ten goede (Lagerwerf, 2000). Samenwerken bevordert dus dat de leerlingen praten over wat ze doen, deden of van plan zijn. Daardoor leren ze beter structureren en zijn ze bewuster bezig met hoe je dingen kunt aanpakken. Dat is een essentiële stap bij leren. Leerlingen werken vaak al in tweetallen aan hun wiskundeopgaven. Vaak gebeurt dit op initiatief van leerlingen, op een wat vrijblijvende manier. Complexe opdrachten en het werken aan leervaardigheden stellen hogere eisen aan samenwerking. In dat geval spreekt men meer over samenwerkend leren (Bogaart & Konings, 2015).

Ook Drijvers et al. (2012) geven aan dat onderlinge discussie en het laten uitleggen van hun ideeën leerlingen helpt om beter te begrijpen waar ze mee bezig zijn (p. 362-363). Dit pleit voor het werken in groepjes, waarbij drietallen effectief blijken te zijn (Dekker, 2015). Dit wordt ook door een docent in de praktijk bevestigd. Het gebruik maken van drietallen of viertallen werkt goed. Dan wordt het niet zo chaotisch in de gespreksvoering (Drijvers, 2015b).

Bij het begeleiden van groepswork kan het goed zijn om als docent niet altijd meteen beschikbaar te zijn. Geef groepjes leerlingen met name in de beginfase tijd om zich in het probleem in te leven en het te begrijpen. De verleiding om dan snel hulp te vragen kan worden afgeremd door als docent druk bezig te zijn met iets anders (klassenboek, agenda) en even niet te reageren op vragende blikken. Grijp niet te snel in in het groepswork en geef de leerlingen ook de kans om fouten te maken en daarvan te leren. Geef hen de tijd om zelf iets te proberen en te ontdekken en om uit een impasse te komen (Bor-de Vries & Drijvers, 2015, p. 20).

Lagerwerf (2000) geeft aan dat leerlingen samenwerken moeten leren. Het tegen elkaar schuiven van vier tafels is niet voldoende. Hij geeft aan dat je leerlingen duidelijk moet maken waarom je samenwerkende groepjes wilt: samenwerkende leerlingen kunnen elkaar beter helpen. De docent heeft meer tijd voor hulp waar die echt nodig is. En samenwerkende leerlingen leren van elkaar. Het klassikaal bespreken is ook eenvoudiger, want in de groepjes is al voorwerk gedaan. Leerlingen die goed kunnen samenwerken staan daarnaast sterker in de maatschappij.

Verder dient aan de leerlingen duidelijk te worden gemaakt wat de verwachtingen zijn: niet alvast aan de oplossing beginnen als een van de anderen nog niet begrijpt wat de bedoeling is, en niet al in het net gaan schrijven als een van de anderen nog zit te puzzelen. Lagerwerf (2000) geeft aan dat het in de meeste gevallen verstandig is om het groepjes vormen eerst maar aan de klas over te laten en je er pas mee te bemoeien als zich problemen voordoen. Groepjes van vijf zijn in het algemeen te groot. Begonnen kan worden met tweetallen, want dan is de samenwerking nog niet zo moeilijk. Schroom verder niet zo nu en dan ongevraagd bij een groepje poolshoogte te nemen.

7. Differentiatie

Eerder zijn al enkele adviezen gegeven bij het ontwerpen van opgaven die aanzetten tot wiskundig denken. Daarbij geldt dat iets wat voor de ene leerling verrassend is voor een andere leerling al uitgekauwd kan zijn. Bor-de Vries & Drijvers (2015) geven in dit kader het belang van het aansluiten bij de voorkennis en ervaring van leerlingen en indien nodig hierin ook te differentiëren aan (p. 6).

Wanneer leerlingen in groepjes bezig zijn, zal het tempo en niveau van de verschillende groepjes variëren, zeker als de leerlingen ze zelf hebben samengesteld. Daarom dient er gezorgd te worden voor manieren van differentiatie en eventueel extra werk voor groepjes die snel klaar zijn. Bedenk bijvoorbeeld een logische vervolgpoging of extra uitdaging. Of vraag leerlingen die snel klaar zijn om hints voor anderen te bedenken. Leerlingen van een groepje dat klaar is, kunnen zich ook verspreiden over andere groepjes om daar te helpen. Je kunt snelle groepjes ook elkaars werk laten uitwisselen, becommentariëren en eventueel beoordelen (Bor-de Vries & Drijvers, 2015, p. 20-21).

Een voorbeeld om te differentiëren (op niveau) uit de praktijk van een wiskundige denkactiviteit betreft de keuze voor ieder groepje leerlingen om zelf oplossingen uit te rekenen bij kwadratische ongelijkheden of de kaartjes met oplossingen van de docent erbij te krijgen, waardoor de verschillende plaatjes wat gemakkelijker te koppelen zijn aan de ongelijkheid die erbij hoort. Daarnaast differentieert de docent in begeleiding van de groepjes. Dit gebeurt via de vragen die worden gesteld en de hints die worden gegeven. Bij sommige groepjes worden vragen gesteld en blijft de docent erbij tot de leerlingen weer verder kunnen, bij andere groepjes laat de docent een ballonnetje op en loopt weer door (Drijvers, 2015b).

Bijlage 3: Aandachtspunten bij probleemoplossen (*Helden et al., 2011*)

Overzicht van de aandachtspunten die een rol spelen bij probleemoplossen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs

I. ALGEMENE REGELS M.B.T. PROBLEEMAANPAK

- Lees de tekst nog eens rustig door (vooraf, tussendoor, achteraf).
- Zeg het eens in eigen woorden.
- Herinner jij je een soortgelijk probleem.
- Probeer eens wat.
- Reken eens een speciaal geval door.
- Maak een plan.
- Bekijk de zaak van diverse kanten.
- Controleer jezelf.
- Denk (achteraf) na over je oplossingsweg.

II. HOUDING/WISKUNDIGE ATTITUDE

- Niet slechts antwoordgericht zijn.
- Systematisch willen werken.
- Zichzelf (waarom-)vragen stellen.
- Behoeftte hebben om vermoedens te bevestigen.
- Op zoek gaan naar generalisaties.
- Willen nadenken over eigen aanpak.
- Het echt willen begrijpen.
- De kracht van een bewijsvoering ervaren.

III. FASEN VAN PROBLEEMAANPAK

A. VERTAALVAARDIGHEDEN/PROBLEEM BEGRIJPEN/MATHEMATISEREN/PROBLEMATISEREN

- Waar gaat het over?
- Wat zijn de belangrijkste gegevens (even apart noteren)?
- Wat zijn de hoofd- en bijzaken?
- Zeg het probleem eens op een andere manier.
- Kies een handige manier om de gegevens weer te geven.
- Maak een plaatje, een tekening, tabel of grafiek.
- Kies een notatie.
- Welke gevaren liggen op de loer bij deze opgave, waarop letten?

B. EEN PLAN MAKEN/STRUCTUREREN

- Maak eens een schatting/gokje en controleer.
- Probeer eens een vermoeden te geven.
- Zoek systematisch, zie je regelmaat.
- Werk van achteren naar voren.
- Neem een (getal-)voorbeeld, neem er meer.
- Kun je het probleem eenvoudiger maken (eerst een deel oplossen/opsplitsen).
- Overdrijf eens.

C. UITVOERING/WERKDISCIPLINE

- Overzichtelijk werken.
- Precies werken (of nagaan hoe precies je moet werken bij deze opgave).
- Resultaten overzichtelijk weergeven.
- Geconcentreerd werken.

D. CONTROLE/TERUGBLIK

- De resultaten in verband brengen met het gevraagde.
- Een schatting van de uitkomst maken.
- Klopt uitkomst met een globaal idee erover?
- Uitkomst invullen in vergelijking en controleren.
- Kan het ook anders gedaan worden?

Bijlage 4: Leerstofanalyse hoofdstuk 8 *Oppervlakte* (Moderne Wiskunde 2B VWO 10^e editie)

Leerdoelen bij hoofdstuk 8 *Oppervlakte* (Moderne Wiskunde 2B VWO 10^e editie)

De leerling

1. kan de oppervlakte van driehoek relateren aan die van een rechthoek die de driehoek inlijst.
2. leert de begrippen *hoogte* en *basis* kennen en kan deze van een driehoek aangeven of berekenen met Pythagoras, ook wanneer de hoogte buiten de driehoek valt.
3. kan de oppervlakte van een driehoek berekenen met de formule: oppervlakte = basis $\times$ hoogte :2
4. weet dat oppervlakte in de formule wordt afgekort met de letter A, waardoor de formule wordt: $A = b \times h : 2$
5. kan de oppervlakte van een parallellogram relateren aan die van een rechthoek met een gelijke basis en hoogte (via verknippen van parallellogram)
6. kan de oppervlakte van een parallellogram berekenen met de formule: oppervlakte = basis $\times$ hoogte of $A = b \times h$.
7. kan met de formule een onbekende hoogte bij een bekende basis berekenen via vergelijking oplossen.
8. kent het begrip *middellijn*.
9. kan m.b.v. de straal de diameter berekenen of andersom.
10. kan aangeven hoe de diameter en de omtrek van een cirkel aan elkaar gerelateerd zijn (er bestaat een vaste verhouding).
11. kan de omtrek van een cirkel berekenen met de formule: omtrek = $\pi \times$ diameter.
12. kan de diameter of straal van een cirkel berekenen bij een gegeven omtrek m.b.v. de formule.
13. weet dat omtrek in de formule wordt afgekort met de letter P, waardoor de formule wordt $P = \pi d$.
14. kan de oppervlakte van een cirkel benaderen door deze in een aantal even grote segmenten te verdelen en een rechthoek te leggen.
15. stelt a.d.h.v. de rechthoek van cirkelsegmenten en de formule voor de oppervlakte voor een rechthoek een formule voor de oppervlakte van een cirkel op.
16. kan de oppervlakte van een cirkel berekenen met de formule: oppervlakte = $\pi \times$ straal $\times$ straal of $A = \pi \times r \times r$ of $A = \pi r^2$.
17. kan de diameter of straal van een cirkel berekenen bij een gegeven oppervlakte m.b.v. de formule.
18. kan de oppervlakte van een cirkel berekenen bij een gegeven omtrek.
19. kan aangeven wat er gebeurt met de oppervlakte van een cirkel als de straal wordt vergroot met een vergrotingsfactor en kan dit gebruiken.

Voorkennis

Leerdoelen van deze paragraaf:

n.v.t.

Voorkennis bij deze paragraaf:

De leerling

1. kan vlakke figuren herkennen en benoemen (te weten vierkant, rechthoek, gelijkbenige driehoek en rechthoekige driehoek), gelijke hoeken en zijden erin aangeven, en de oppervlakte ervan berekenen vaak via inlijsten.
2. herhaalt het berekenen van een onbekende zijde in een rechthoekige driehoek met de stelling van Pythagoras via het maken van een schets en het invullen van het bijbehorende schema.
3. kan lengte- en oppervlaktematen omrekenen.
4. kan de vergrotingsfactor berekenen, en benoemen wat er met de omtrek en oppervlakte van een vergroting gebeurt bij een bepaalde vergrotingsfactor.

Analyse van de opgaven:

Hoofdstuk 8 Oppervlakte	Op ga ve	Wiskundige onderwerpen	LD	Type opgave : ori ont verw	Opmerkingen/ vlaggen	Fase in 6E met mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
Voorkennis	1	Gelijke hoeken en gelijke zijden aangeven met tekens. Vormen van figuren benoemen. Oppervlakten berekenen met inlijsten. Langste zijde berekenen met Pythagoras	1	ont	Kennen leerlingen de tekens voor gelijke zijden? Verskil gelijkbenige en gelijkzijdige driehoek is bekend? Kennen leerlingen de techniek van inlijsten?	E1
	2	Pythagoras toepassen bij gegevens van driehoeken. Driehoek zelf is niet gegeven.	2	ont	Tip: maak een schets van de driehoek. Doorloop dezelfde stappen als bij de gegeven aanpak!	E1
	3	Oppervlakte rechthoek, oppervlakte rechthoekige driehoek als helft van een rechthoek, Pythagoras.	2	ont		E1

	4	Afstanden meten.	n.v.t.	ont	Kortste afstand is de loodrechte afstand. Geodriehoek gebruiken!	E1
	5	Lengtematen en oppervlaktematen omrekenen	3	ont	'Omrekentrap' herhalen?	E1
	6	Oppervlakten rechthoeken uitrekenen. Eerst omrekenen naar dezelfde lengtemaat	1 en 3	ont		E1
	7	Vergroting, factor uitrekenen, omtrek en oppervlakte bij vergroting	4	ont		E1
	8	Omtrek en oppervlakte van vergroting uitrekenen met gegeven factor.	4	ont	Theorie vooraf: 'Bij een factor k wordt de oppervlakte van de vergroting k^2 keer zo groot.' Begrepen? Nee? Zie afbeelding bij opgave 7. $\frac{1}{3}$ kwadrateren op rekenmachine $\rightarrow$ haakjes $\rightarrow (1:3)^2$	E1

Suggesties en mogelijke aanvullingen uit andere bronnen:

LD	Bron	Typering	Wiskundige onderwerpen	Opmerkingen/vlaggen	Fase in 6E met mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.

§8.1 Driehoeken

Leerdoelen van deze paragraaf:

De leerling

1. kan de oppervlakte van driehoek relateren aan die van een rechthoek die de driehoek inlijst.
2. leert de begrippen *hoogte* en *basis* kennen en kan deze van een driehoek aangeven of berekenen met Pythagoras, ook wanneer de hoogte buiten de driehoek valt.
3. kan de oppervlakte van een driehoek berekenen met de formule: oppervlakte = basis $\times$ hoogte :2
4. weet dat oppervlakte in de formule wordt afgekort met de letter A, waardoor de formule wordt: $A = b \times h : 2$

Voorkennis bij deze paragraaf:

De leerling

1. kan van het vierkant, de rechthoek en de driehoek de oppervlakte berekenen via lengte en breedte of via inlijsten.
2. kan een onbekende zijde in een rechthoekige driehoek met de stelling van Pythagoras via het maken van een schets en het invullen van het bijbehorende schema berekenen .
3. kan lengte- en oppervlaktematen omrekenen.

Analyse van de opgaven:

Hoofdstuk 8 Oppervlakte	Op ga ve	Wiskundige onderwerpen	LD	Type opgave : ori ont verw	Opmerkingen/ vlaggen	Fase in 6E met mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
8-1 Driehoeken	1	Oppervlakte driehoek berekenen m.b.v. inlijsten. Ontdekken dat oppervlakte driehoek = helft van de oppervlakte rechthoek die de driehoek inlijst. Hoogtelijn is al getekend en wordt gebruikt voor het berekenen van de oppervlakte.	1	ori		E3, maar de opgave moet dan minder sturend zijn en de leerling aanzetten tot meer activiteit. Daarnaast moet worden nagedacht over wanneer en hoe je de begrippen <i>basis</i> en <i>hoogte</i> introduceert. Wellicht met concreet materiaal en gekleurde driehoeken.
	2	Oppervlakte driehoeken berekenen m.b.v. de ontdekte eigenschap dat dit gelijk is	1	ori	Verschillende driehoeken die door dezelfde rechthoek worden ingelijst. Oppervlakte driehoeken zijn dus gelijk.	E2. Het idee is leuk: verschillende driehoeken in eenzelfde rechthoek die het inlijst, wat betekent dit voor de

		aan de helft van de oppervlakte van de rechthoek die de driehoek inlijst.				verschillende driehoeken? Of discussie in de klas: welke is het grootst?
	3	Oppervlakte driehoeken berekenen m.b.v. de formule $A = b \times h : 2$. Hoogte eenmaal eerst uitrekenen m.b.v. Pythagoras.	2 en 3	ont	Driehoek PQR is complexer, doordat er meer getallen bij staan. Ook moet de leerling de hoogte eerst uitrekenen met Pythagoras. Komt de leerling tot een juiste aanpak?	E4, maar driehoek PQR is wat lastiger omdat Pythagoras aan bod komt. Hoogte introduceren als de kortste afstand van de basis tot het tegenoverliggende punt. Hoe dan bij hoogte buiten driehoek? Teken basis door als hint en laat de lln zelf de hoogte tekenen.
	4	Hoogte opmeten, formule voor oppervlakte invullen.	2 en 3	ori/ont	Hoogte ligt in de tweede situatie buiten de driehoek. De leerling wordt begeleid bij deze eerste kennismaking daarmee. Vult de leerling de basis goed in? (AC en niet AE)	E3, de wiskundige inhoud (basis buiten driehoek) moet terugkomen in E3.
	5	Oppervlakte driehoeken berekenen m.b.v. de formule $A = b \times h : 2$. Soms eerst hoogte uitrekenen m.b.v. Pythagoras.	2 en 3	ont	Belangrijke opgave! Kiest de leerling de juiste basis en hoogte? Komt de leerling uit het uitrekenen van de hoogte via Pythagoras?	E4 of E6
	6	Gegeven formules vergelijken met $A = b \times h : 2$. Welke is overeenkomstig?	4	verw	Wat voegt deze vraag toe? Schept de vraag geen verwarring? Moet de leerling hiermee worden geconfronteerd?	E6, maar liever overslaan.
	7	Oppervlakte van gegeven gelijkbenige driehoek op 2 verschillende manieren (andere basis). Eerst hoogte uitrekenen wat maar in 1 situatie kan (hoogte deelt tegenoverliggende zijde in twee gelijke stukken). Daarna andere hoogte uitrekenen met gevonden oppervlakte (vergelijking oplossen).	2 en 3	verw		E6

Suggesties en mogelijke aanvullingen uit andere bronnen:

LD	Bron	Typering	Wiskundige onderwerpen	Opmerkingen/vlaggen	Fase in 6E met mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
2				Er moeten meer opgaven worden gezocht/ontworpen die aandacht geven aan de hoogte buiten de driehoek (stomphoekige driehoek), en aan het zoeken van de juiste hoogte bij verschillende basissen van eenzelfde driehoek.	
1, 2 en 3	Getal & Ruimte 2 vwo deel 1 10 ^e editie p. 69-73	Wiskundemethode	Oppervlakte driehoek via zijde en bijbehorende hoogte en oppervlakte stomphoekige driehoek	Getal & Ruimte geeft veel meer aandacht aan verschillende basissen en bijbehorende hoogte. Ook wordt de oppervlakte van de stomphoekige driehoek apart behandeld.	Opgave O47: Fase E3 (LD 1) Opgave O50: Fase E3 (stomphoekige driehoek) Opgave 51: Fase E4 (contextloos inoefenen)
1	Getal & Ruimte 2 vmbo-bk deel 2 10 ^e editie p. 18-24	Wiskundemethode	Oppervlakte driehoek via zijde en bijbehorende hoogte, geen oppervlakte stomphoekige driehoek	Wederom aandacht voor verschillende basissen en bijbehorende hoogte. "De breedte van de rechthoek is even lang als de hoogte van de driehoek"	Opgave O23: Fase E3 (LD1 via knippen)
2 en 3	Getal & Ruimte 2 vmbo-kgt deel 2 10 ^e editie p. 10-16	Wiskundemethode	Oppervlakte driehoek via zijde en bijbehorende hoogte en oppervlakte stomphoekige driehoek		Opgave 17: Fase E4 (contextloos inoefenen)
3	Getal & Ruimte 2 havo deel 1 10 ^e editie p. 67-71	Wiskundemethode	Oppervlakte driehoek via zijde en bijbehorende hoogte en oppervlakte stomphoekige driehoek		Opgave 67: Fase E6 (mozaïek)
3	Getal & Ruimte 2 havo/vwo deel 1 10 ^e editie p. 68-72	Wiskundemethode	Oppervlakte driehoek via zijde en bijbehorende hoogte en oppervlakte stomphoekige driehoek		Opgave 58: Fase E6 (oppervlakte vliegers)
3	Moderne wiskunde 2A vmbo-gt(h) 10 ^e editie p. 72-73	Wiskundemethode	Oppervlakte driehoek als helft van de oppervlakte van een parallellogram	Binnen het hoofdstuk oppervlakte komt een parallellogram eerst, de driehoek volgt daarop.	E4: paragraaf 3.2 wijdt meerdere opgaven aan het tekenen van de verschillende bijbehorende hoogten bij een zijde (in dezelfde driehoek)

				“de oppervlakte van een driehoek is de helft van de oppervlakte van een parallellogram”	bijv.)
3	Netwerk 2A vwo 4 ^e editie p. 32-48	Wiskundemethode	Oppervlakte driehoek als helft van de oppervlakte van een parallellogram	Binnen het hoofdstuk omtrek en oppervlakte komt een parallellogram eerst, de driehoek volgt daarop. Ze worden in dezelfde paragraaf behandeld. “Elke driehoek is de helft van een parallellogram. Voor de oppervlakte van een driehoek geldt daarom...”	
3	Netwerk 2A vmbo-gt/havo 4 ^e editie p. 92-103	Wiskundemethode	Oppervlakte driehoek als helft van de oppervlakte van een parallellogram		Theorieblok p. 95: E3

§8.2 Parallellogrammen

Leerdoelen van deze paragraaf:

De leerling

- kan de oppervlakte van een parallellogram relateren aan die van een rechthoek met een gelijke basis en hoogte (via verknippen van parallellogram)
- kan de oppervlakte van een parallellogram berekenen met de formule: oppervlakte = basis $\times$ hoogte of $A = b \times h$.
- kan met de formule een onbekende hoogte bij een bekende basis berekenen via vergelijking oplossen.

Voorkennis bij deze paragraaf:

De leerling

- kent de parallellogram als vlakke figuur en kan eigenschappen (gelijke zijden, gelijke hoeken, symmetrieas) benoemen.
- kan een onbekende zijde in een rechthoekige driehoek met de stelling van Pythagoras via het maken van een schets en het invullen van het bijbehorende schema berekenen.
- kan lengte- en oppervlaktematen omrekenen.
- kan van het vierkant, de rechthoek en de driehoek de oppervlakte berekenen via lengte en breedte of via basis en hoogte of inlijsten.
- kent de begrippen *hoogte* en *basis* en kan deze van een driehoek aangeven.
- weet dat oppervlakte in een formule wordt afgekort met de letter *A*.
- kan de vergrotingsfactor berekenen, en benoemen wat er met de omtrek en oppervlakte van een vergroting gebeurt bij een bepaalde vergrotingsfactor.

Analyse van de opgaven:

Hoofdstuk 8 Oppervlakte	Op ga ve	Wiskundige onderwerpen	LD	Type opgave : ori ont verw	Opmerkingen/ vlaggen	Fase in 6E met mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
8-2 Parallellogrammen	8	Oppervlakte rechthoek, verschil oppervlakte rechthoek en parallellogram inschatten, oppervlakte parallellogram via inlijsten.	5	ori		E2, maar dan klassikaal.
	9	Oppervlakte rechthoek en parallellogram vergelijken via verplaatsen rechthoekige	5	ori	Belangrijke ontdekking voor inzicht in oppervlakte parallellogram.	E3, maar de opgave moet dan minder sturend zijn en de leerling aanzetten tot meer activiteit.

		driehoek in parallellogram.				Wellicht met concreet materiaal en gekleurde vlakken.
	10	Oppervlakte parallellogram berekenen met formule $A = b \times h$. Hoogte uitrekenen via invullen van formule (vergelijking oplossen).	6 en 7	ont		E4, maar <i>KLMN</i> is wat lastiger omdat Pythagoras aan bod komt. Hoe dan bij hoogte buiten parallellogram? Teken basis door als hint en laat de lln zelf de hoogte tekenen.
	11	Hoogte berekenen met Pythagoras, oppervlakte parallellogram berekenen, hoogte opmeten, hoogte controleren via invullen van formule (vergelijking oplossen).	6	ont	Afbeelding is op schaal 1:2 (staat er naast)! Dit is nodig bij 11c. 11d komt de leerling hieruit?	E6 (of E4)
	12	Oppervlakte parallellogrammen berekenen. Soms eerst hoogte uitrekenen met Pythagoras.	6	verw	Belangrijke opgave C en d zijn lastig. Ziet de leerling de rechthoekige driehoek waarin Pythagoras kan worden toegepast?	E4 of E6 (wat lastiger om de hoogte te vinden, daarom geen eenvoudige opgave om routine te ontwikkelen).
	13	Oppervlakte parallellogram berekenen. Daarna andere hoogtelijn uitrekenen via invullen van formule (vergelijking oplossen).	6 en 7	verw	Deze opgave bevat de kern van de paragraaf.	E6 (of E4)

Suggesties en mogelijke aanvullingen uit andere bronnen:

LD	Bron	Typering	Wiskundige onderwerpen	Opmerkingen/vlaggen	Fase in 6E met mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
6				Er moeten meer opgaven worden gezocht/ontworpen die aandacht geven aan de hoogte buiten het parallellogram.	
6	Getal & Ruimte 2 vwo deel 1 10 ^e editie p. 74-79	Wiskundemethode	Oppervlakte van een parallellogram	Getal & Ruimte gebruikt voor het ontdekken van de formule basis x hoogte de indeling in twee driehoeken via diagonaal. Moderne wiskunde	O61: Fase E3 (parallellogram via 2 driehoeken)

				doet dit pas bij de gemengde opdrachten. “Een zijde en de bijbehorende hoogte staan loodrecht op elkaar”	
6	Getal & Ruimte 2 vmbo-t/havo deel 1 10 ^e editie p. 17-23	Wiskundemethode	Oppervlakte van een parallellogram		O20: Fase E3 (parallellogram via 2 driehoeken met knipwerk)
5	Moderne wiskunde 2A vmbo-gt(h) 10 ^e editie p. 72-73	Wiskundemethode	Oppervlakte van een parallellogram	Binnen het hoofdstuk oppervlakte komt een parallellogram eerst, de driehoek volgt daarop. “de oppervlakte van een driehoek is de helft van de oppervlakte van een parallellogram”	4: E4 (zelf 2x basis en bijbehorende hoogte opmeten en oppervlakte uitrekenen bij zelfde parallellogram)
6	Netwerk 2A vwo 4 ^e editie p. 32-48	Wiskundemethode	Oppervlakte van een parallellogram	Binnen het hoofdstuk omtrek en oppervlakte komt een parallellogram eerst, de driehoek volgt daarop. Ze worden in dezelfde paragraaf behandeld. “de lengte en breedte van de rechthoek zijn gelijk aan de basis en de hoogte van het parallellogram. Daarom geldt...”	2: E4 (Hoogte bij gekleurde basis tekenen) Denkertje (p. 36): E3 (hoogte valt buiten het parallellogram) 6: E4 bij hoogte buiten parallellogram (zelf geschikte basis en hoogte bepalen bij parallellogrammen op roosterpapier)
6	Netwerk 2A havo/vwo 4 ^e editie p. 30-44	Wiskundemethode	Oppervlakte van een parallellogram		Denkertje (p. 34): E3 (zelfde als bij 2 vwo, maar de stippellijnen zijn gegeven) 7: E4 bij hoogte buiten parallellogram (zelf geschikte basis en hoogte bepalen bij parallellogrammen op roosterpapier)

§8.3 Omtrek van een cirkel

Leerdoelen van deze paragraaf:

De leerling

8. kent het begrip *middellijn*.
9. kan m.b.v. de straal de diameter berekenen of andersom.
10. kan aangeven hoe de diameter en de omtrek van een cirkel aan elkaar gerelateerd zijn (er bestaat een vaste verhouding).
11. kan de omtrek van een cirkel berekenen met de formule: $\text{omtrek} = \pi \times \text{diameter}$.
12. kan de diameter of straal van een cirkel berekenen bij een gegeven omtrek m.b.v. de formule.
13. weet dat omtrek in de formule wordt afgekort met de letter P, waardoor de formule wordt $P = \pi d$.

Voorkennis bij deze paragraaf:

De leerling

1. kent de begrippen *straal* en *diameter* van een cirkel.
2. kan een cirkel tekenen met een gegeven straal of diameter met een passer.
3. kent de begrippen *omtrek* en *oppervlakte* en kan deze berekenen van het vierkant, de rechthoek, de driehoek en het parallellogram.

Analyse van de opgaven:

Hoofdstuk 8 Oppervlakte	Op ga ve	Wiskundige onderwerpen	LD	Type opgave : ori ont verw	Opmerkingen/ vlaggen	Fase in 6E met mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
8-3 Omtrek van een cirkel	14	Cirkel tekenen, middellijn in cirkel tekenen en opmeten	8	ori	Passer nodig! Weet de leerling nog wat de straal is? Als die bekend is, hoe lang is de diameter dan?	E3
	15	Diameters euromunten opmeten, gegeven omtrekken aan juiste euromunt koppelen, nagaan met welk getal de diameter is vermenigvuldigd om de omtrek te krijgen.	9 en 10	ori	Leuke opgave! Leerlingen ontdekken verhouding tussen diameter en omtrek.	E3
	16	Tabel invullen met straal, diameter en omtrek cirkel. Er	9 en 11	ont		E4

		is er steeds 1 gegeven.				
	17	Omtrek, diameter of straal uitrekenen als 1 van de andere bekend is.	9, 11 en 12	ont		E6
	18	Omtrek in Tabel invullen bij verschillende diameters. Grafiek tekenen.	11	ont	Voegt deze opgave iets toe? 18b denkvraag	E4 of E6: Overslaan
	19	Omtrek berekenen bij gegeven straal fietswiel. Daarna aantal omwentelingen fietswiel berekenen bij gegeven afstand. Ten slotte straal van kleinere fietswiel berekenen bij zelfde afstand en gegeven aantal omwentelingen.	9, 11 en 12	verw	Omrekenen naar zelfde lengtematen (meters)! Haalt de leerling uit de context de berekeningen die hij moet maken?	E6
	20	Halve omtrek cirkels berekenen via gegeven diameter.	11	verw		E6

Suggesties en mogelijke aanvullingen uit andere bronnen:

LD	Bron	Typering	Wiskundige onderwerpen	Opmerkingen/vlaggen	Fase in 6E met mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
-				Er moet een opgave worden gezocht voor fase E2.	
10 en 11	Getal & Ruimte 1 vwo deel 2 10 ^e editie p. 157-165	Wiskundemethode	Omtrek cirkel	Omtrek cirkel via context met ETRO-systeem voor fietsbanden Contexten (met soms overbodige informatie) maken het leuke, lastige opgaven.	O32: Fase E3 33c: Fase E6 (omrekenen hoe vaak fietswiel heeft rondgedraaid) A36: Fase E6 (omrekenen hoe vaak fietswiel heeft rondgedraaid) A38: Fase E6 (context met afstand die wijzer van klok aflegt)
11	Getal & Ruimte 1 havo/vwo deel 2 10 ^e editie p. 157-163	Wiskundemethode	Omtrek cirkel	Contexten (met soms overbodige informatie) maken het leuke, lastige opgaven.	V45: Fase E6 (context met grootste voertuig op aarde en graafwiel)

10	Getal & Ruimte 1 vmbo-t/havo deel 2 10 ^e editie p. 67-71	Wiskundemethode	Omtrek cirkel	Zelf ontdekken via meetlint om willekeurig rond voorwerp	O29: Fase E3 (willekeurig voorwerp) O61: Fase E3 (omtrek van fietswiel zelf bepalen)
10	Netwerk 2A vwo 4 ^e editie p. 32-48	Wiskundemethode	Omtrek cirkel	Zelf ontdekken van verhouding tussen diameter en omtrek via gestructureerde instapopgave (p. 33)	E3

§8.4 Oppervlakte van een cirkel

Leerdoelen van deze paragraaf:

De leerling

14. kan de oppervlakte van een cirkel benaderen door deze in een aantal even grote segmenten te verdelen en een rechthoek te leggen.
15. stelt a.d.h.v. de rechthoek van cirkelsegmenten en de formule voor de oppervlakte voor een rechthoek een formule voor de oppervlakte van een cirkel op.
16. kan de oppervlakte van een cirkel berekenen met de formule: oppervlakte = $\pi \times \text{straal} \times \text{straal}$ of $A = \pi \times r \times r$ of $A = \pi r^2$.
17. kan de diameter of straal van een cirkel berekenen bij een gegeven oppervlakte m.b.v. de formule.
18. kan de oppervlakte van een cirkel berekenen bij een gegeven omtrek.
19. kan aangeven wat er gebeurt met de oppervlakte van een cirkel als de straal wordt vergroot met een vergrotingsfactor en kan dit gebruiken.

Voorkennis bij deze paragraaf:

De leerling

1. kent de begrippen *straal* en *diameter* van een cirkel.
2. kan een cirkel tekenen met een gegeven straal of diameter met een passer.
3. kent de begrippen *omtrek* en *oppervlakte* en kan deze berekenen van het vierkant, de rechthoek, de driehoek en de parallellogram.
4. kan m.b.v. de straal de diameter berekenen of andersom.
5. kan de omtrek van een cirkel berekenen met de formule: omtrek = $\pi \times \text{diameter}$ of $P = \pi d$.
6. kan de diameter of straal van een cirkel berekenen bij een gegeven omtrek m.b.v. de formule.

Analyse van de opgaven:

Hoofdstuk 8 Oppervlakte	Op ga ve	Wiskundige onderwerpen	LD	Type opgave : ori ont verw	Opmerkingen/ vlaggen	Fase in 6E met mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
8-4 Oppervlakte van een cirkel	21	Cirkel tekenen op 1cm x 1cm roosterpapier. Hoe groot is de oppervlakte?		ori		E3
	22	Cirkel tekenen en uitknippen in 12 gelijke sectoren. Soort rechthoek ervan maken.	13	ori	Opgave met concreet materiaal. Tijdrovend, maar leuk!	E3, gebruiken!

		Oppervlakte rechthoek uitrekenen en daarmee oppervlakte cirkel benaderen.				
23		Omtrek cirkel, <i>lengte AB langs de boogjes</i> = $\pi \times \text{straal}$, waarom? Daaruit bepalen dat $\text{oppervlakte cirkel} = \pi \times \text{straal} \times \text{straal}$	14	ori	Lastige opgave! Belangrijk voor 'weten waarom' van formule voor oppervlakte cirkel.	E3, gebruiken!
24		Oppervlakte cirkel berekenen in context bij gegeven straal en diameter.	15	ont		E4
25		Straal berekenen bij gegeven oppervlakte (vergelijking oplossen), omtrek berekenen, oppervlakte berekenen bij gegeven omtrek (vergelijking oplossen).	16 en 17	verw	Lastig opgave! Denk aan <u>niet</u> tussentijds afronden. Gewoon doorrekenen met knop 'ans'.	E6
26		Oppervlakte cirkel, vergrotingsfactor van 6: wat gebeurt er met de oppervlakte? Dit ook beredeneren bij een vergrotingsfactor van 3 via invullen in de formule (uitwerken).	15 en 18	verw	26c lastig	E6
27		Oppervlakte cirkel, oppervlakte bijzonder figuur (opp cirkel – opp rechthoek), oppervlakte van vergroting bijzonder figuur berekenen met gegeven vergrotingsfactor.	15 en 18	verw	Lengtematen omrekenen!	E6
28		Oppervlakte bijzonder figuur berekenen ($\frac{1}{2} \times (\text{opp cirkel 1} - \text{opp cirkel 2} - \text{opp cirkel 3})$), daarmee kosten berekenen. Oppervlakte bijzonder figuur berekenen (opp cirkel 4 – 2 x	15	verw	Erg lastige opgave! In context staat 'email'. Hiermee wordt niet elektronisch berichtverkeer bedoeld. Kent de leerling dit?	E6

		opp cirkel 5), daarmee percentage berekenen. Oppervlakte bijzonder figuur berekenen (opp cirkel 6 – opp cirkel 5).			Lengtematen omrekenen!	
--	--	--	--	--	------------------------	--

Suggesties en mogelijke aanvullingen uit andere bronnen:

LD	Bron	Typering	Wiskundige onderwerpen	Opmerkingen/vlaggen	Fase in 6E met mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
-				Er moet een opgave worden gezocht voor fase E2.	
15				Er moeten meer opgaven worden gezocht voor fase E4.	
13, 14 en 15	Getal & Ruimte 1 vwo deel 2 10 ^e editie p. 157-165	Wiskundemethode	Oppervlakte van een cirkel	Contexten (met soms overbodige informatie) maken het leuke, lastige opgaven.	O40: Fase E3 (formule ontdekken a.d.h.v. dartbord) A44: Fase E6 (context van rotonde)
15	Getal & Ruimte 1 havo/vwo deel 2 10 ^e editie p. 157-163	Wiskundemethode	Oppervlakte van een cirkel		V52: Fase E6 (oppervlakte van complexe figuren)
15	Getal & Ruimte 1 vmbo-t/havo deel 2 10 ^e editie p. 67-71	Wiskundemethode	Oppervlakte van een cirkel		41/42: Fase E6 (context met sproeier en tuin) A43: Fase E6 (context met voetbalveld)
15	Getal & Ruimte 2 vmbo-bk deel 2 10 ^e editie p. 33-38	Wiskundemethode	Oppervlakte van een cirkel	Voor fase E4	69: Fase E4
15	Netwerk 2A vwo 4 ^e editie p. 32-48	Wiskundemethode	Oppervlakte van een cirkel		17: E3 (oppervlakte van een vierkant van straal x straal past tussen de 2 en 4 keer in de cirkel)

Overige paragrafen

1. §8.5 Gemengde opgaven
2. Test jezelf
3. Extra oefening-basis
4. Extra oefening-gemengd
5. Extra oefening-complex

Analyse van de opgaven:

Hoofdstuk 8 Oppervlakte	Op ga ve	Wiskundige onderwerpen	Type opgave : ori ont verw	Opmerkingen/ vlaggen	Te gebruiken bij 1. LD 2. 6E-fase 3. mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
8-5 Gemengde opgaven	29	Oppervlakte van bijzondere figuren uitrekenen	verw	Figuur 2 en 3: Ziet de leerling hoe je de hoogtes van de parallellogrammen kunt bepalen?	Figuur 1 en 2: 1. LD 15 2. Fase E6 Figuur 3: 1. LD 6 2. Fase E6
	30	Oppervlakte vergroting driehoek uitrekenen, oppervlakte bijzondere figuren uitrekenen via vergrotingen en bijbehorende oppervlaktes.	verw	Weet de leerling nog wat er gebeurt met de oppervlakte van een vergroting als je de factor weet?	Niet gebruiken
	31	Oppervlakte trapezium via inlijsten, oppervlakte trapezium ook via twee driehoeken in trapezium (driehoeken weer via basis x hoogte:2).	verw	31c Basis en hoogte van driehoeken bepalen misschien lastig.	1. LD 3 2. Fase E6
	32	Oppervlakte parallellogram, omtrek parallellogram (Pythagoras is nodig),	verw	Weet de leerling nog wat er gebeurt met de omtrek en oppervlakte van een vergroting als je de factor weet?	1. LD 6 2. Fase E6

		vergrotingsfactor parallellogram berekenen bij bekende nieuwe omtrek, oppervlakte vergroting, omtrek vergroting parallellogram berekenen bij bekende nieuwe oppervlakte.			
	33	Oppervlakte rechthoekige driehoek (eerst hoogte uitrekenen via Pythagoras), oppervlakten halve cirkels op zijden driehoek, oppervlakten halve cirkels vergelijken en verklaren waarom ze het zelfde zijn (bij Pythagoras en oppervlakte cirkel: kwadrateren van de (halve) zijden), omtrek bijzonder figuur via halve cirkels.	verw	33d lastig → klassikaal bespreken?	Niet gebruiken? 1. LD 15 2. Fase E6
	34	Willekeurige parallellogram en één diagonaal tekenen. Daaruit verklaren dat uit <i>oppervlakte parallellogram = basis × hoogte</i> de formule <i>oppervlakte driehoek = basis × hoogte: 2</i> af te leiden is.	verw		1. LD 5 2. Fase E3 3. Maar dan andersom → vanuit de twee driehoeken de formule voor de oppervlakte van het parallellogram ontdekken
	35	Binnen plaatje afstanden bepalen (twee rechte stukken + een cirkel) en oppervlakte bepalen (twee rechthoeken + cirkel 1 – cirkel 2).	verw	35b: kan de leerling de straal van de cirkel bepalen? Leuke opgave!	Vraag a en b: 1. LD 11 2. Fase E6 Vraag c: 1. LD 15 2. Fase E6
	36	Oppervlakte van bijzonder figuur berekenen (opp driehoek – opp kwartcirkel).	verw		1. LD 15 2. Fase E6

Hoofdstuk 8 Oppervlakte	Op ga ve	Wiskundige onderwerpen	Type opgave : ori ont verw	Opmerkingen/ vlaggen	Te gebruiken bij 1. LD 2. 6E-fase 3. mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
Test jezelf	1	Oppervlakten driehoeken berekenen, soms eerst hoogte uitrekenen met Pythagoras. Daarna binnen zelfde driehoeken hoogtes uitrekenen als je een andere basis neemt (via vergelijken oplossen).	verw		1. LD 3 2. Fase E4 of E6
	2	Oppervlakten parallellogrammen berekenen, soms eerst hoogte uitrekenen met Pythagoras. Daarna binnen zelfde parallellogrammen hoogtes uitrekenen als je een andere basis neemt (via vergelijking oplossen). Daarvoor soms eerst basis uitrekenen met Pythagoras.	verw		Vraag a: 1. LD 6 2. Fase E4 of E6 Vraag b: 1. LD 7 2. Fase E4 of E6
	3	Omtrek cirkel bij gegeven diameter. Straal cirkel bij gegeven omtrek.	verw		Vraag a: 1. LD 11 2. Fase E4 Vraag b: 1. LD 12 2. Fase E4
	4	Oppervlakten berekenen van cirkel en bijzondere figuren. Vergrotingsfactor van nieuwe cirkel uitrekenen en daarmee bepalen wat er met de oppervlakte v.d. vergroting gebeurt.	verw		1. LD 15 2. Fase E4 of E6

	5	Omtrek en oppervlakte cirkel bij gegeven diameter. Omtrek cirkel berekenen met in diameter precies drie kleinere cirkels met bekende diameter. Percentage berekenen van deel van oppervlakte van grote cirkel dat door andere cirkels wordt bedekt.	verw	5d lastig! Weet de leerling hoe hij/zij een percentage kan bereken? Deel als procent van het geheel: Kleinste aantal : totaal x 100%	Vraag a en c: 1. LD 11 2. Fase E6 Vraag b en d: 1. LD 15 2. Fase E2 (?) en E6
	6	Straal cirkel berekenen bij bekende oppervlakte. Oppervlakte cirkel uitrekenen bij bekende omtrek. Omtrek cirkel uitrekenen bij bekende oppervlakte. Omtrek wordt 4x zo groot, wat gebeurt er met de oppervlakte? Oppervlakte wordt 4x zo groot, wat gebeurt er met de omtrek?	verw		1. LD 15 2. Fase E6
	7	Parallellogram tekenen. Omtrek en oppervlakte parallellogram berekenen (eerst hoogte via Pythagoras). Omtrek en oppervlakte vergroting berekenen bij bekende factor.	verw		Niet gebruiken? 1. LD 6 2. Fase E6
	8	Omtrek en oppervlakte bijzonder figuur uitrekenen. Pythagoras is nodig voor de hoogte v.d. gelijkbenige driehoek.	verw		Niet gebruiken.

Hoofdstuk 8 Oppervlakte	Op ga ve	Wiskundige onderwerpen	Type opgave : ori ont verw	Opmerkingen/ vlaggen	Te gebruiken bij 1. LD 2. 6E-fase 3. mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
Extra oefening-basis	1	Oppervlakten driehoeken berekenen, soms eerst hoogte uitrekenen met Pythagoras.	verw		1. LD 3 2. Fase E4
	2	Oppervlakten driehoek berekenen. Daarna binnen zelfde driehoek hoogte uitrekenen als je een andere basis neemt (via vergelijken oplossen). Daarna verklaren waarom dat voor de laatste hoogte niet kan (basis onbekend).	verw		1. LD 3 2. Fase E4
	3	Oppervlakten parallellogrammen berekenen, soms eerst hoogte uitrekenen met Pythagoras. Daarna binnen één parallellogram hoogte uitrekenen als je een andere basis neemt (via vergelijking oplossen).	verw		1. LD 6 en 7 2. Fase E4 of E6
	4	Oppervlakte parallellogram berekenen, eerst hoogte uitrekenen met Pythagoras. Daarna omtrek parallellogram. Vervolgens oppervlakte en omtrek uitrekenen bij bekende vergrotingsfactor.	verw		1. LD 6 2. Fase E6
	5	Tabel invullen met straal, diameter en omtrek cirkel. Er	verw		1. LD 11 2. Fase E4

		is er steeds 1 gegeven.			
	6	Omtrek cirkels berekenen. Twee omtrekken gegeven, bepalen welke cirkels daarbij horen (straal uitrekenen via vergelijking oplossen).	verw		1. LD 11 2. Fase E4 of E6
	7	Oppervlakte cirkel uitrekenen bij bekende omtrek. Omtrek cirkel uitrekenen bij bekende oppervlakte.	verw		1. LD 15 2. Fase E6
	8	Oppervlakten berekenen van cirkel en een rand van een cirkel. Oppervlakte van bijzonder figuur berekenen (opp cirkel – opp rechthoek).	verw		1. LD 15 2. Fase E6

Hoofdstuk 8 Oppervlakte	Op ga ve	Wiskundige onderwerpen	Type opgave : ori ont verw	Opmerkingen/ vlaggen	Te gebruiken bij 1. LD 2. 6E-fase 3. mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
Extra oefening- gemengd	1	Oppervlakten bijzondere figuren uitrekenen. Figuur 1 = opp parallellogram – opp driehoek. Eerst met Pythagoras hoogte uitrekenen. Figuur 2 = opp parallellogram – opp driehoek – opp driehoek. Parallellogram en twee driehoeken hebben zelfde hoogte.	verw	Lastige opgave! Kan op verschillende manieren.	Niet gebruiken.
	2	Diameter voetbal gegeven, omtrek berekenen. Touw om voetbal ligt 1 meter er van af. Verschil lengte touw en omtrek bal berekenen (diameter van cirkel van touw is 2 meter groter). Touw om de wereld ligt 1 meter van de grond af. Verschil lengte touw en omtrek aarde berekenen (diameter aarde is gegeven, diameter van cirkel van touw is 2 meter groter).	verw	Leuke opgave! Plaatje bij maken. Lengtematen omrekenen.	1. LD 11 2. Fase E2 en E6
	3	Oppervlakte driehoek en oppervlakte bijzondere figuren (aftreksom of optelsom van oppervlakte driehoeken) berekenen. Percentage berekenen van het deel van de rechthoek dat door 1 bijzonder figuur wordt bedekt.	verw		1. LD 3 2. Fase E6

	4	Oppervlakte bijzondere figuren berekenen en een keer bijbehorend percentage en een keer bijbehorende kosten (vermenigvuldiging) berekenen.	verw	4c: lengtematen omrekenen.	1. LD 15 2. Fase E2 (?) en E6
--	---	--	------	----------------------------	----------------------------------

Hoofdstuk 8 Oppervlakte	Op ga ve	Wiskundige onderwerpen	Type opgave : ori ont verw	Opmerkingen/ vlaggen	Te gebruiken bij 1. LD 2. 6E-fase 3. mogelijke docent- en leerlingactiviteiten
Extra oefening- complex	1	Kegel wordt gemaakt van halve cirkel. Straal van grondvlak kegel berekenen. Daarvoor eerst omtrek grondvlak berekenen (omtrek halve begincirkel). Dan met vergelijking oplossen de diameter berekenen. Daarna de straal.	verw	Leuke opgave!	1. LD 11 2. Fase E2 of E6
	2	Oppervlakte cilinder berekenen.	verw	Leuke opgave! Plaatje bij maken. "Als je de cilinder zou open klappen, zodat je een vlak figuur krijgt, hoe ziet het er dan uit?"	1. LD 15 2. Fase E6
	3	Beredeneren voor welke waarde van r de twee formules $A = \pi r^2$ en $P = 2\pi r$ gelijk aan elkaar zijn.	verw	Kan via vergelijking oplossen. Dan $r = 2$. Maar ook $r = 0$.	Niet gebruiken.
	4	Oppervlakte piramide berekenen. Daarvoor hoogte van zijvlakken (driehoeken) berekenen via Pythagoras.	verw	Plaatje bij maken.	1. LD 3 2. Fase E6
	5	Bij plaatje aantonen dat de lengte van vier halve cirkels met diameters a , b , c en d even groot is als de lengte van de halve cirkel met diameter $a+b+c+d$	verw	Lastige opgave. Zeer abstract. Leerling moet volgens uitwerkingen haakjes wegwerken. Dat heeft de leerling in hoofdstuk 5 al gehad.	Niet gebruiken.

Bijlage 5: Lesformulieren en ontworpen opgavenbladen

LESVOORBEREIDINGSFORMULIER

ONDERWERP: OPPERVLAKE VAN EEN PARALLELLOGRAM (**LES 1 6E-MODEL**)

Docent: Ward Perenboom

Klas: V2A

Datum:

Lokaal:

Voorkennis De leerling 1. kent de parallellogram als vlakke figuur en kan eigenschappen (gelijke zijden, gelijke hoeken, symmetrieas) benoemen. 2. kan een onbekende zijde in een rechthoekige driehoek met de stelling van Pythagoras via het maken van een schets en het invullen van het bijbehorende schema berekenen. 3. kan lengte- en oppervlaktematen omrekenen. 4. kan van het vierkant, de rechthoek en de driehoek de oppervlakte berekenen via lengte en breedte of inlijsten. 5. kan de vergrotingsfactor berekenen, en benoemen wat er met de omtrek en oppervlakte van een vergroting gebeurt bij een bepaalde vergrotingsfactor.	Leerlingdoelen (kennis, houding, vaardigheden) De leerling: 1. kan de oppervlakte van een parallellogram relateren aan die van een rechthoek met een gelijke basis en hoogte (via verknippen van parallellogram) 2. leert de begrippen <i>hoogte</i> en <i>basis</i> kennen en kan deze van een parallellogram aangeven of berekenen met Pythagoras, ook wanneer de hoogte buiten de driehoek valt. 3. kan de oppervlakte van een parallellogram berekenen met de formule: oppervlakte = basis $\times$ hoogte of $A = b \times h$. 4. kan met de formule een onbekende hoogte bij een bekende basis berekenen via vergelijking oplossen. 5. weet dat oppervlakte in de formule wordt afgekort met de letter A, waardoor de formule wordt: $A = b \times h$
--	--

Tijd	Klok	Leerlingactiviteit	Docentactiviteit	Materiaal
5		Binnenkomst. Plaatsnemen, spullen in de tas laten.	Leerlingen ontvangen bij de deur. Een rondje lopen en contact maken.	
5		Luisteren naar de docent.	Uitleg geven over de komende lessen. Wat wordt er van de leerlingen verwacht? Instructie op digibord	<i>Instructie 6E-lessen</i> op papier en digitaal Digibord
5		Antwoord geven op vragen van de docent.	E1: Voorkennis ophalen door vragen te stellen bij rechthoek op whiteboard en PowerPoint : - Wat is omtrek? (kijk eens naar de rechthoek) - Wat is oppervlakte? (kijk naar rechthoek) - Hoe kun je de omtrek van een figuur berekenen?	<i>PowerPoint les 1</i>

			(Voorbeeld geven) - Van welke figuren kun je de oppervlakte al berekenen? Hoe? - Diagonaal rechthoek berekenen, dan stelling van Pythagoras: wat was belangrijk bij het invullen van het schema?	
5		Luisteren naar de docent. Antwoord geven op de vragen van de docent.	E2: docent laat afbeelding van rechthoek en parallellogram zien: - Hoe noemen we deze figuren? - Wat kun je zeggen over de omtrek van deze twee figuren? - Van welke weten we al hoe we de oppervlakte kunnen berekenen? - Welke figuur heeft een grotere oppervlakte? Wie denkt de rechthoek? Wie denkt het parallellogram? - Kan ik met 6 lucifers een parallellogram maken waarvan ik zeker op het zicht weet dat deze een kleinere oppervlakte heeft dan de rechthoek?	<i>PowerPoint les 1</i>
20		Leerlingen gaan in drietallen zitten. Een aantal leerlingen helpt met het uitdelen van het materiaal. Leerlingen gaan aan de slag met het werkblad.	E3, E4 en E5a: Docent stuurt het in groepjes zitten aan. De groepsindeling staat op het bord Docent deelt samen met leerlingen het materiaal uit en zet de leerlingen aan het werk. Docent doet de klasadministratie. Docent begeleidt het groepswork. - De docent stelt vooral gesloten vragen: "Is het zo dat...?", "Hoe groot is...?" - De docent is sturend of coachend.	<i>Groepsindeling op bord</i> <i>Opgavenblad les 1 30 x</i> Scharen en lijmstiften

5		Luisteren naar de docent. Antwoord geven op de vragen van de docent.	E5b: de docent stelt centraal vragen over de inhoud van het werkblad en met name opdracht 5: - Wat hebben jullie in het groepje opgeschreven bij opdracht 5? En jullie? En waarom? - Zou je een formule kunnen opstellen voor de oppervlakte van een parallellogram? - Docent introduceert letter A voor oppervlakte. E6: - Terugkomen op E2: Wat kun je nu zeggen over de oppervlakte van het parallellogram t.o.v. de rechthoek?	<i>Powerpoint les 1</i>
5		Luisteren naar de docent. Antwoord geven op de vragen van de docent. Leerlingen gaan aan de slag met toepassingsvragen.	E6: Docent begeleidt het groepswork bij het maken van toepassingsvragen.	
		Spullen opruimen.	Afsluiting: HW opgeven. Leerlingen spullen laten opruimen.	

Fasen DI (directie instructie, Ebbens): 1. aandacht richten, 2. informatie geven, 3. check begrip/vaardigheid, 4. instructie, 5. zelfstandig werken, 6. afsluiting

Bordschema	Bijlagen (voorbereide uitleg, uitgebreid bordschema, uitgewerkte instructie, powerpoint presentatie met aantekeningen, leerlingwerkblad, lijst practicumbenodigdheden, etc.) • <i>Instructie 6E-lessen</i> • <i>Powerpoint les 1</i> • <i>Groepsindeling</i> • <i>Opgavenblad les 1</i>
------------	---

Opgavenblad les 1 *Parallelogrammen*

Leerling	
Andere groepsleden	
Klas	

Dit opgavenblad heeft een werkblad.

Jullie werken de komende lessen veel samen in hetzelfde drietal.
Het maken van de opdrachten en het denkwerk doen jullie voor een groot deel samen.
Je begint pas aan een opdracht als ieder groepslid weet wat de bedoeling is.

Aan het einde van de les kunnen jullie de oppervlakte van een parallellogram berekenen.

Opdracht 1

Op het werkblad staan drie parallellogrammen op ruitjespapier.
Verdeel de drie parallellogrammen over de groepsleden: ieder 1 parallellogram.
Knip ieder het parallellogram uit.

Ieder van de drie parallellogrammen kun je in stukken knippen waarmee je een rechthoek kunt maken. Daarvoor moet je 1 of 2 keer over een roosterlijn knippen. Dat hangt van het parallellogram af. Zoek uit hoe je jouw parallellogram over de roosterlijn in stukken kunt knippen zodat je een rechthoek kunt maken. Plak jouw rechthoek hieronder op.

Opdracht 2

De zijde van het parallellogram die ook in de opgeplakte rechthoek zit, noemen we de *basis*.
De andere zijde van de rechthoek die je bij opdracht 1 hebt geplakt, noemen we de *hoogte*.

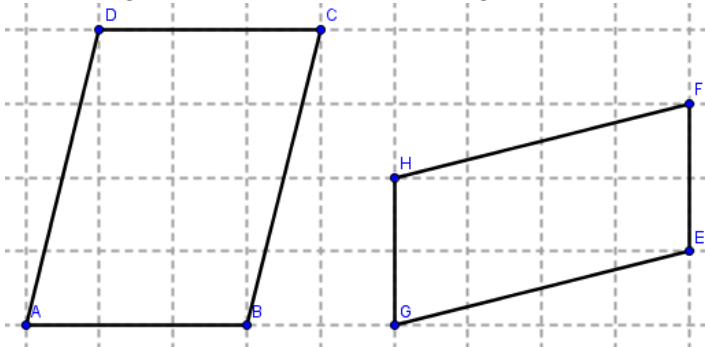
Van de rechthoek die is gemaakt van parallellogram *ABCD* bij opdracht 1 is in onderstaande tabel de basis gegeven. Vul de tabel verder in.

	<i>Basis</i>	<i>Hoogte</i>	<i>Oppervlakte</i>
Rechthoek bij parallellogram <i>ABCD</i>	3		
Rechthoek bij parallellogram <i>EFGH</i>			
Rechthoek bij parallellogram <i>IJKL</i>			

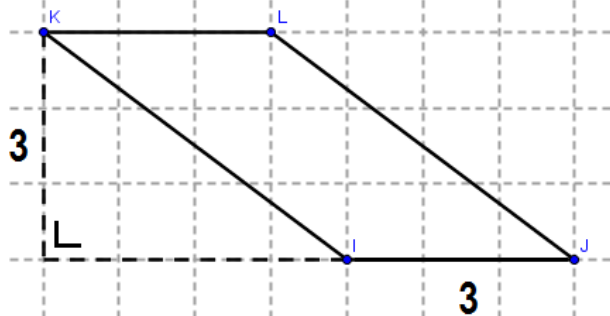
Wat kun je zeggen over de oppervlakte van het parallellogram waarmee jullie steeds begonnen en de oppervlakte van de rechthoek die jullie hebben gemaakt?

Opdracht 3

De hoogte van een parallellogram staat altijd loodrecht op de basis. Teken in de parallellogrammen hieronder de hoogte op de basis. Neem als basis zijde AB en zijde GH .



Van het parallellogram $IJKL$ hieronder is de hoogte bij de basis IJ aangegeven.



Waarom is de bijbehorende hoogte bij basis IJ buiten het parallellogram aangegeven?

Bereken nu bij ieder parallellogram de oppervlakte. 1 hokje is 1 cm^2 .

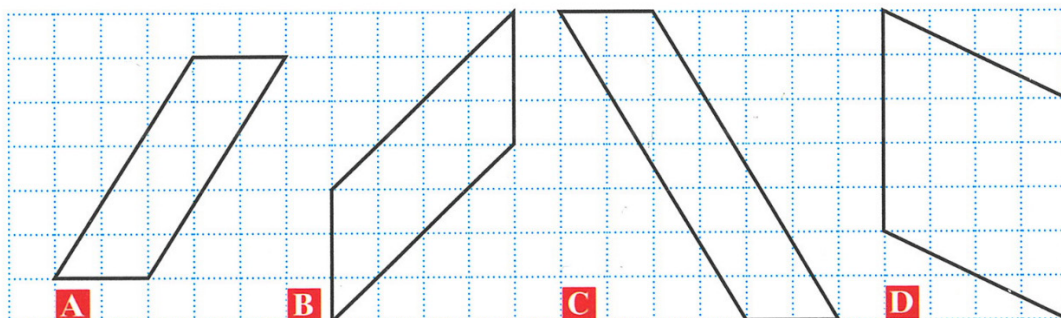
Parallellogram $ABCD$:

Parallellogram $EFGH$:

Parallellogram $IJKL$:

Opdracht 4

Bereken de oppervlakte van de onderstaande parallellogrammen. Kies zelf een geschikte basis en een bijbehorende hoogte. 1 hokje is 1 cm^2 .



A:

B:

C:

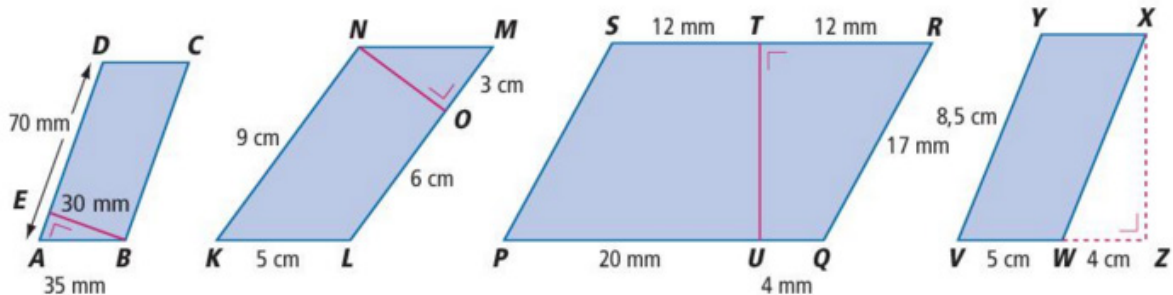
D:

Opdracht 5

Leg uit hoe je de oppervlakte van een parallellogram kunt berekenen. Schrijf jullie bevinding hieronder op.

Opdracht 6

Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van de parallellogrammen hieronder?



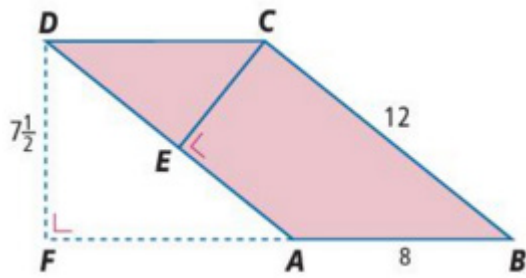
Parallelogram *ABCD*:

Parallelogram *KLMN*:

Parallelogram *PQRS*:

Parallelogram *VWXY*:

Opdracht 7

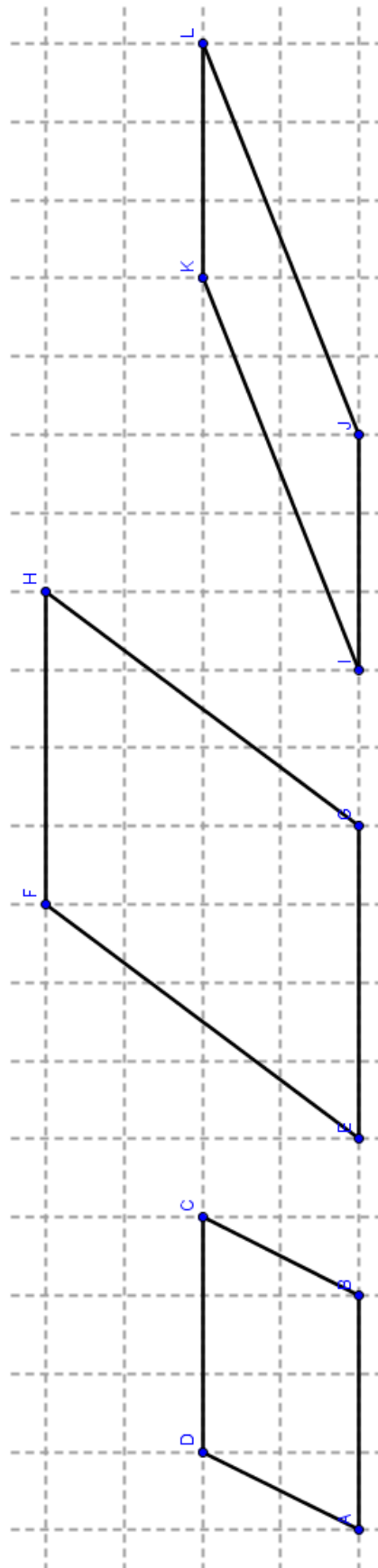


Bereken de oppervlakte van parallellogram $ABCD$ hierboven.

Bereken de lengte van CE .

Werkblad

Opdracht 1



LESVOORBEREIDINGSFORMULIER

ONDERWERP: OPPERVLAKE VAN EEN DRIEHOEK (*LES 2 6E-MODEL*)

Docent: Ward Perenboom

Klas: V2A

Datum:

Lokaal:

Voorkennis	Leerlingdoelen (kennis, houding, vaardigheden)
De leerling 1. kent de parallellogram als vlakke figuur en kan eigenschappen (gelijke zijden, gelijke hoeken, symmetrieas) benoemen. 2. kan een onbekende zijde in een rechthoekige driehoek met de stelling van Pythagoras via het maken van een schets en het invullen van het bijbehorende schema berekenen. 3. kan lengte- en oppervlaktematen omrekenen. 4. kan van het vierkant, de rechthoek, de parallellogram en de driehoek de oppervlakte berekenen via lengte en breedte, via basis en hoogte of via inlijsten. 5. kan de vergrotingsfactor berekenen, en benoemen wat er met de omtrek en oppervlakte van een vergroting gebeurt bij een bepaalde vergrotingsfactor. 6. kent de begrippen <i>hoogte</i> en <i>basis</i> en kan deze van een parallellogram aangeven. 7. kan de oppervlakte van een parallellogram berekenen met de formule: oppervlakte = basis $\times$ hoogte 8. kan met de formule van een parallellogram een onbekende hoogte bij een bekende basis berekenen via vergelijking oplossen. 9. weet dat oppervlakte in de formule wordt afgekort met de letter A, waardoor de formule wordt: $A = b \times h$	De leerling 1. kan de oppervlakte van driehoek relateren aan die van een rechthoek die de driehoek inlijst. 2. kent de begrippen <i>hoogte</i> en <i>basis</i> en kan deze van een driehoek aangeven of berekenen met Pythagoras, ook wanneer de hoogte buiten de driehoek valt. 3. kan de oppervlakte van een driehoek berekenen met de formule: oppervlakte = basis $\times$ hoogte :2 4. weet dat oppervlakte in de formule wordt afgekort met de letter A, waardoor de formule wordt: $A = b \times h : 2$

Tijd	Klok	Leerlingactiviteit	Docentactiviteit	Materiaal
5		Binnenkomst. Plaatsnemen, spullen in de tas laten.	Leerlingen ontvangen bij de deur. Een rondje lopen en contact maken.	
5-10		Luisteren naar de docent. Antwoord geven op vragen van de docent.	E1: voorkennis ophalen door vragen te stellen bij afbeeldingen in PowerPoint : - Eenvoudige voorbeelden van parallellogrammen - Formule herhalen ($A = b \times h$)	<i>PowerPoint les 2</i> Digibord

			- Opgave 7 van de vorige les bespreken (docent laat zien hoe het had moeten)	
5		Luisteren naar de docent. Antwoord geven op de vragen van de docent.	E2: docent zet drie grote gekleurde driehoeken op het bord en stelt vragen: - Wat valt je op aan de driehoeken? - Hoe noemen we deze figuren? - Welke van de drie is het grootst denk je? Wie denkt de linker? Wie de middelste? Wie de rechter?	Drie gekleurde driehoeken met gelijke basis en hoogte (rood, zwart, groen)
20		Leerlingen gaan in drietallen zitten. Een aantal leerlingen helpt met het uitdelen van het materiaal. Leerlingen gaan aan de slag met het werkblad.	E3, E4 en E5a: Docent stuurt het in groepjes zitten aan. Docent deelt samen met leerlingen het materiaal uit en zet de leerlingen aan het werk. Docent haalt de opgavenbladen van de vorige les op. Docent doet de klasadministratie. Docent begeleidt het groepswork. - De docent stelt vooral gesloten vragen: "Is het zo dat...?", "Hoe groot is...?" - De docent is sturend of coachend.	<i>Opgavenblad les 2</i> 30 x Scharen en lijmstiften
5		Luisteren naar de docent. Antwoord geven op de vragen van de docent.	E5b: de docent stelt centraal vragen over de inhoud van het werkblad en met name opdracht 5: - Wat hebben jullie in het groepje opgeschreven bij opdracht 5? En jullie? En waarom? - Zou je een formule kunnen opstellen voor de oppervlakte van een driehoek? - Docent herhaalt letter A voor oppervlakte. E6: terugkomen op E2 - Wat kun je nu zeggen over de oppervlakten van de drie driehoeken op het whiteboard?	<i>Powerpoint les 2</i> Drie gekleurde driehoeken met gelijke basis en hoogte (rood, zwart, groen)

			- Laten we de drie driehoeken op elkaar leggen. Wat valt je nu op? Wat betekent dat voor de oppervlakte?	
5		Luisteren naar de docent. Antwoord geven op de vragen van de docent. Leerlingen gaan aan de slag met toepassingsvragen.	E6: Docent begeleidt het groepswork bij het maken van toepassingsvragen.	
		Spullen opruimen.	Afsluiting: HW opgeven. Leerlingen spullen laten opruimen.	

Fasen DI (directie instructie, Ebbens): 1. aandacht richten, 2. informatie geven, 3. check begrip/vaardigheid, 4. instructie, 5. zelfstandig werken, 6. afsluiting

Bordschema	Bijlagen (voorbereide uitleg, uitgebreid bordschema, uitgewerkte instructie, powerpoint presentatie met aantekeningen, leerlingwerkblad, lijst practicumbenodigdheden, etc.) • <i>Powerpoint les 2</i> • <i>Opgavenblad les 2</i> • 3 gekleurde driehoeken
------------	--

Opgavenblad les 2 Driehoeken

Leerling	
Andere groepsleden	
Klas	

Dit opgavenblad heeft een werkblad.

Jullie werken deze les weer samen in hetzelfde drielal.

Het maken van de opdrachten en het denkwerk doen jullie voor een groot deel samen.

Je begint pas aan een opdracht als ieder groepslid weet wat de bedoeling is.

Aan het einde van de les kunnen jullie de oppervlakte van een driehoek berekenen.

Opdracht 1

Op het werkblad staan drie paren van driehoeken op ruitjespapier.

Steeds bestaan ze uit twee dezelfde driehoeken.

Verdeel de drie paren over de groepsleden: ieder 1 paar driehoeken.

Knip jouw driehoeken uit.

Leg de driehoeken op zo'n manier tegen elkaar aan dat je een parallellogram krijgt. Plak jouw figuur hieronder op.

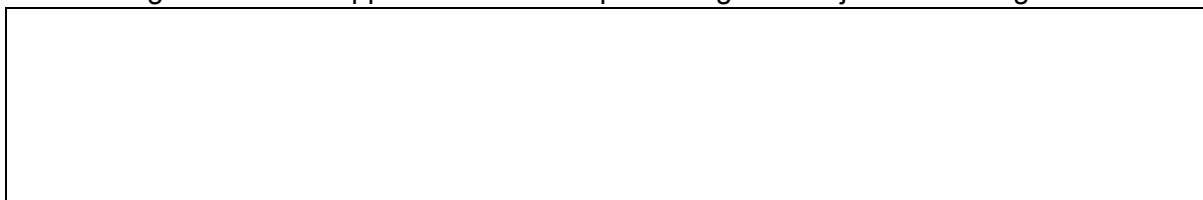


Opdracht 2

Van het parallellogram dat is gemaakt van de driehoeken *ABC* en *DEF* bij opdracht 1 (het eerste paar) is in onderstaande tabel de basis gegeven. Vul de tabel verder in.

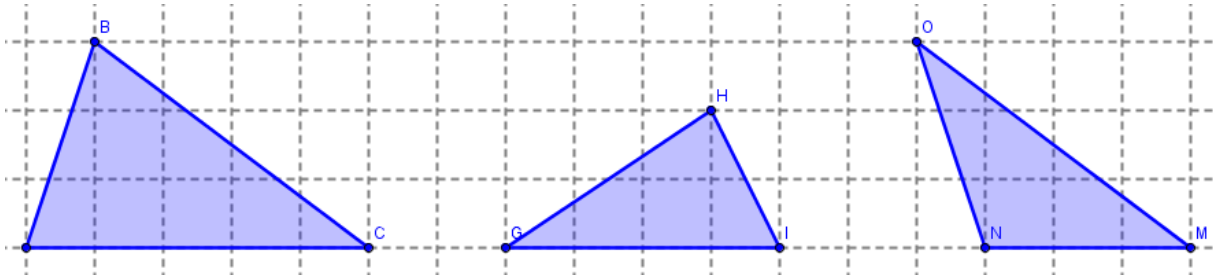
	<i>Basis</i>	<i>Hoogte</i>	<i>Oppervlakte parallellogram</i>	<i>Oppervlakte van één driehoek</i>
Parallellogram 1	5			
Parallellogram 2				
Parallellogram 3				

Wat kun je zeggen over de oppervlakte van een van de twee driehoeken waarmee jullie steeds begonnen en de oppervlakte van het parallellogram dat jullie hebben gemaakt?



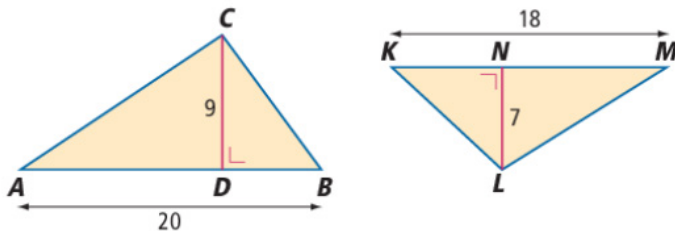
Opdracht 3

Geef de basis en de hoogte van de opgeplakte parallelogrammen aan in de onderstaande driehoeken waarmee jullie begonnen. Zet de letter b bij de basis, teken de bijbehorende hoogte en zet daar de letter h bij.



Opdracht 4

Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$ en $\triangle KLM$.



$\triangle ABC$:

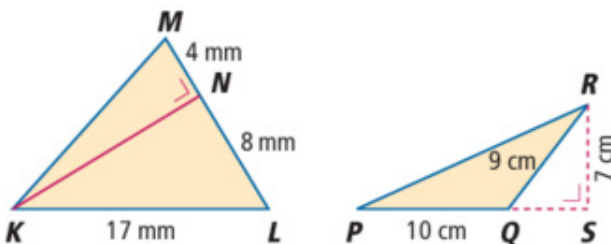
$\triangle KLM$:

Opdracht 5

Leg uit hoe je de oppervlakte van een driehoek kunt berekenen. Schrijf jullie bevinding hieronder op.

Opdracht 6

Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van de driehoeken hieronder?

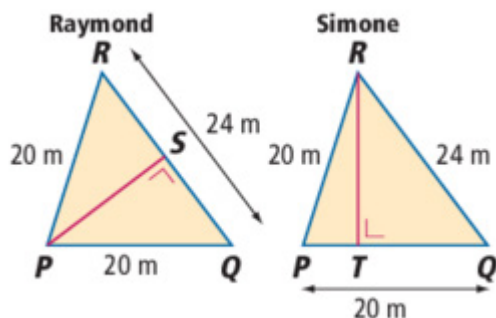


$\triangle KLM$:

$\triangle PQR$:

Opgave 7

Raymond en Simone rekenen allebei de oppervlakte van de gelijkbenige driehoek PQR uit, maar kiezen ieder een andere basis en hoogte.

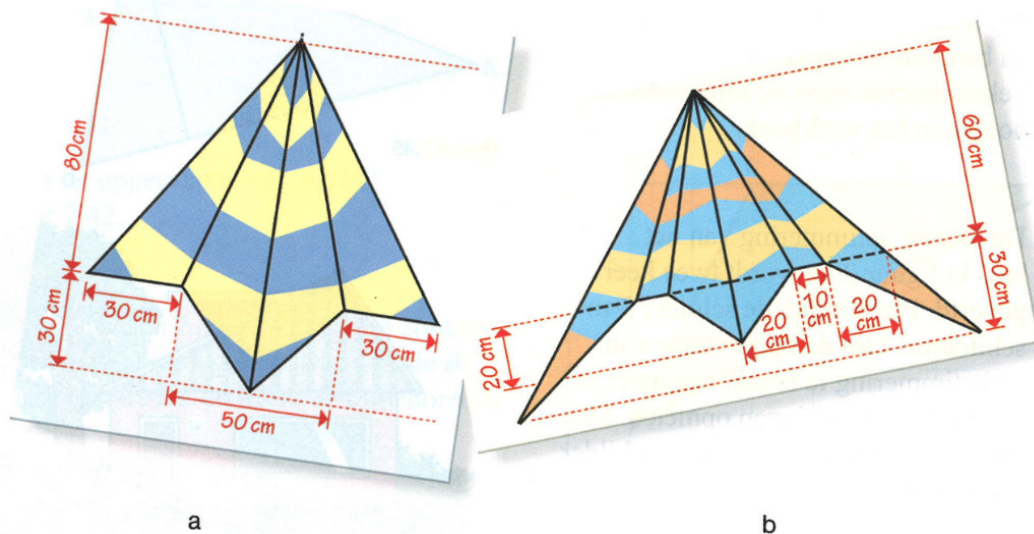


Eén van de twee heeft genoeg informatie om de oppervlakte van $\triangle PQR$ te berekenen. Wie is dat? Reken de oppervlakte van $\triangle PQR$ uit.

Met de oppervlakte van $\triangle PQR$ kun je voor de ander de hoogte bij de gekozen basis berekenen. Reken de hoogte voor de ander uit.

Opdracht 8

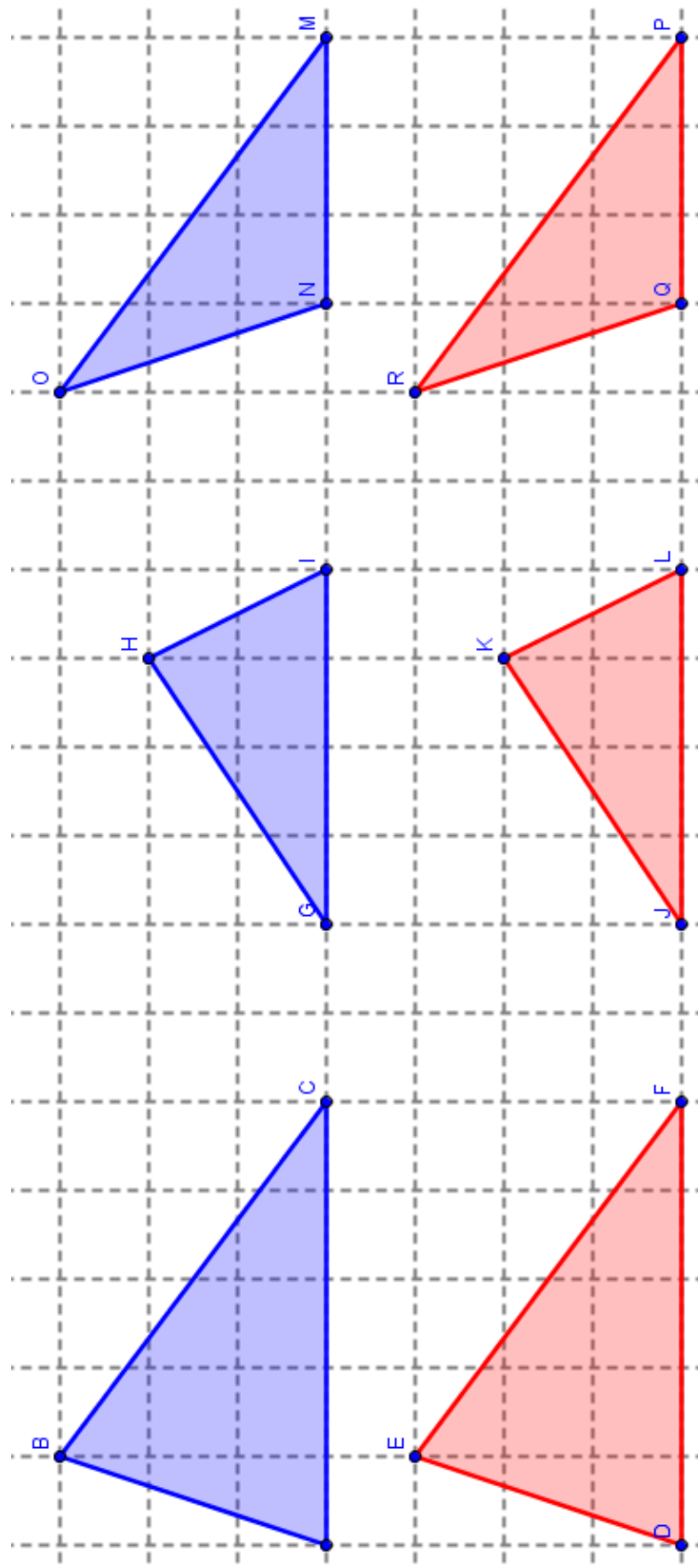
Hieronder zie je twee vliegers. Bereken van beide vliegers de oppervlakte in dm^2 .



a:	b:

Werkblad

Opdracht 1



LESVOORBEREIDINGSFORMULIER

ONDERWERP: OMTREK VAN EEN CIRKEL (**LES 3 6E-MODEL**)

Docent: Ward Perenboom

Klas: V2A

Datum:

Lokaal:

Voorkennis	Leerlingdoelen (kennis, houding, vaardigheden)
De leerling 1. kan lengte- en oppervlaktematen omrekenen. 2. kent de begrippen <i>straal</i> en <i>diameter</i> van een cirkel. 3. kan een cirkel tekenen met een gegeven straal of diameter met een passer. 4. kent de begrippen <i>omtrek</i> en <i>oppervlakte</i> en kan deze berekenen van het vierkant, de rechthoek, de driehoek en het parallellogram.	De leerling 1. kent het begrip <i>middellijn</i>. 2. kan m.b.v. de straal de diameter berekenen of andersom. 3. kan aangeven hoe de diameter en de omtrek van een cirkel aan elkaar gerelateerd zijn (er bestaat een vaste verhouding). 4. kan de omtrek van een cirkel berekenen met de formule: $\text{omtrek} = \pi \times \text{diameter}$. 5. kan de diameter of straal van een cirkel berekenen bij een gegeven omtrek m.b.v. de formule. 6. weet dat omtrek in de formule wordt afgekort met de letter P, waardoor de formule wordt $P = \pi d$.

Tijd	Klok	Leerlingactiviteit	Docentactiviteit	Materiaal
5		Binnenkomst. Plaatsnemen, spullen in de tas laten.	Leerlingen ontvangen bij de deur. Een rondje lopen en contact maken.	
10		Luisteren naar de docent. Antwoord geven op vragen van de docent.	E1: - Opgave 8 van de vorige les bespreken (docent laat zien hoe het had gemoeten) Voorkennis ophalen door vragen te stellen bij constructie cirkel op digibord: - Hoe noemen we dit punt hier (middelpunt)? - De afstand van dit middelpunt tot de rand is altijd gelijk, hoe noemen we die afstand? - Ik kan een rechte lijn trekken door het middelpunt van de ene kant naar de andere kant. Wat kun je over deze lijn zeggen (hij deelt de cirkel in twee even grote stukken, hij is twee keer zo lang als de	Digibord <i>Powerpoint les 3</i> Voorbereiding constructie cirkel (al een keer geoefend)

			straal)? - Deze lijn noemen we de middellijn. De lengte van de middellijn noemen we de diameter. - Als ik de straal heb, bijv. ... hoe bereken ik dan de diameter? - En als ik de diameter heb, bijv. ... hoe bereken ik dan de straal?	
5		Luisteren naar de docent. Antwoord geven op de vragen van de docent.	E2: docent stelt vragen bij afbeelding op digibord van cirkel met straal 10 met daarin 6 gelijkzijdige driehoeken - Hoe groot is de straal van de cirkel? - Wat kun je zeggen over de driehoeken? Waarom? - Hoe groot is de omtrek ongeveer?	<i>Powerpoint les 3</i>
5		Leerlingen gaan in drietallen zitten. Een aantal leerlingen helpt met het uitdelen van het materiaal. Leerlingen gaan aan de slag met het werkblad.	E3: Docent stuurt het in groepjes zitten aan. Docent deelt samen met leerlingen het materiaal uit en zet de leerlingen aan het werk. Docent geeft aan: na opgave 1 centrale terugkoppeling. Docent haalt de opgavenbladen van de vorige les op. Docent doet de klasadministratie. Docent begeleidt het groepswork. - De docent stelt vooral gesloten vragen: "Is het zo dat...?", "Hoe groot is...?" - De docent is sturend of coachend.	<i>Opgavenblad les 3 30 x</i> 5 paren van 2 dezelfde voorwerpen (1 als controlegroep) Stukken touw Scharen Meetlinten
5		Luisteren naar de docent. Antwoord geven op de vragen van de docent.	E3: Centrale uitwisseling van de bevindingen van opgave 1. Klassikaal opgave 2 maken (tabel invullen).	<i>Powerpoint les 3 met tabel opgave 2</i>
10		Leerlingen gaan verder in drietallen aan de slag met het werkblad.	E3, E4 en E5a: Docent begeleidt het groepswork. - De docent stelt vooral gesloten vragen: "Is het zo	

			dat...?", "Hoe groot is...?" - De docent is sturend of coachend.	
5		Luisteren naar de docent. Antwoord geven op de vragen van de docent.	E5b: de docent stelt centraal vragen over de inhoud van het werkblad en met name opdracht 5: - Wat hebben jullie in het groepje opgeschreven bij opdracht 5? En jullie? En waarom? - Docent introduceert π. - Zou je een formule kunnen opstellen voor de omtrek van een cirkel? - Docent introduceert letter P voor omtrek.	
5		Leerlingen gaan aan de slag met toepassingsvragen.	E6: Docent begeleidt het groepswork bij het maken van toepassingsvragen.	
		Spullen opruimen.	Afsluiting: HW opgeven. Leerlingen spullen laten opruimen.	

Fasen DI (directie instructie, Ebbens): 1. aandacht richten, 2. informatie geven, 3. check begrip/vaardigheid, 4. instructie, 5. zelfstandig werken, 6. afsluiting

Bordschema	Bijlagen (voorbereide uitleg, uitgebreid bordschema, uitgewerkte instructie, powerpoint presentatie met aantekeningen, leerlingwerkblad, lijst practicumbenodigdheden, etc.) • <i>Opgavenblad les 3</i> • <i>Powerpoint les 3</i> (inclusief tabel opgave 2) • 5 paren ronde voorwerpen met touw, schaar en meetlint
------------	--

Opgavenblad les 3 *Omtrek van een cirkel*

Leerling	
Andere groepsleden	
Klas	

Jullie werken deze les weer samen in hetzelfde drietal.

Het maken van de opdrachten en het denkwerk doen jullie voor een groot deel samen.

Je begint pas aan een opdracht als ieder groepslid weet wat de bedoeling is.

Aan het einde van de les kunnen jullie de omtrek van een cirkel berekenen.

Opdracht 1

Benodigdheden:

- Een rond voorwerp
- Een schaar
- Een stuk touw
- Een meetlint

Meet de diameter van jullie voorwerp:

Diameter = cm

Om de omtrek van jullie voorwerp te bepalen, kun je er een touwtje om heen leggen. Daarna kun je de lengte van het touwtje opmeten. Knip een goed stuk touw af. Zorg er vervolgens voor dat het touw rondom het voorwerp past. Daarvoor zullen jullie steeds een stukje eraf moeten knippen tot het nagenoeg strak rondom het voorwerp zit.

Meet de lengte van jullie touw:

Omtrek = cm

Met welk getal (factor) moet je jullie diameter vermenigvuldigen om jullie omtrek te krijgen?

--

Opdracht 2

Klassikaal wordt de volgende tabel ingevuld. Vul de tabel ook in.

Voorwerp	Diameter in cm	Omtrek in cm	Factor
1			
1			
2			
2			
3			
3			
4			
4			
5			
5			

Opdracht 3

Bereken de gemiddelde factor van de hele klas.

--

Opdracht 4

Geef nu met de gemiddelde factor van de klas een vrij precieze berekening van de omtrek van een cirkel met een straal van 10 cm.

Opdracht 5

Wat kunnen jullie zeggen over de diameter en de omtrek van een cirkel? Geef een toelichting.

Opdracht 6

Zoek op je rekenmachine het symbool π



Toets achtereenvolgens de knoppen  en  en druk op =.

Schrijf hieronder op wat je rekenmachine aangeeft.

Vergelijk dit antwoord met de gemiddelde factor van de klas. Hoe groot is het verschil?

Vermenigvuldig het getal op je rekenmachine (π) met de diameter van jullie voorwerp. Vergelijk dit antwoord met jullie gevonden omtrek. Hoe groot is het verschil?

Geef een formule voor de omtrek van een cirkel.

Geef met de formule een zeer precieze berekening van de omtrek van een cirkel met een straal van 10 cm. Rond je antwoord af op één decimaal.

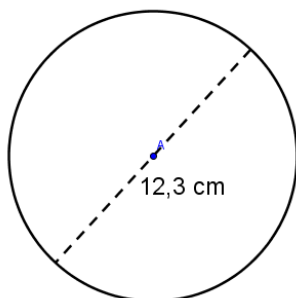
Opdracht 6

Vul de tabel hieronder verder in. Rond je antwoorden af op één decimaal.

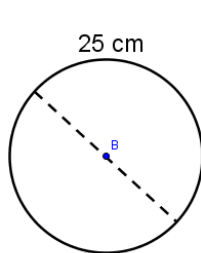
<i>straal cirkel</i>	<i>diameter cirkel</i>	<i>omtrek cirkel</i>
...	9	...
2,4	...	...
13,5	...	...
...	12	...

Opdracht 7

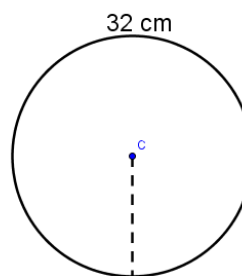
Bereken steeds de gevraagde lengte.



Omtrek =
Diameter = 12,3 cm



Omtrek = 25 cm
Diameter =



Omtrek = 32 cm
Straal =

Cirkel A:

Cirkel B:

Cirkel C:

Opgave 8

De oude fiets hiernaast heeft een voorwiel met een straal van 80 cm.

Hoeveel cm is de afstand die het voorwiel aflegt als het één keer ronddraait? Rond af op hele cm.

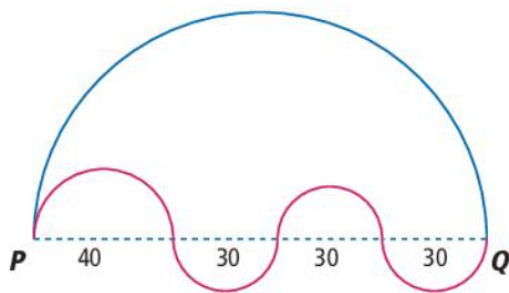
Nick fietst met deze fiets in 20 minuten met een snelheid van 18 km per uur naar zijn oma. Hoe vaak draait het voorwiel rond?

Het achterwiel draait tijdens deze rit 3200 keer rond. Hoeveel cm is de straal van het achterwiel?



Opgave 9

In de tekening hieronder zijn er drie routes om van punt P naar punt Q te gaan.



Hoe lang is de route via de grote boog?

Bereken de afstand die je aflegt via de gekronkelde route. Welke route is korter?

LESVOORBEREIDINGSFORMULIER

ONDERWERP: OPPERVLAKTE VAN EEN CIRKEL (**LES 4 6E-MODEL**)

Docent: Ward Perenboom

Klas: V2A

Datum:

Lokaal:

Voorkennis	Leerlingdoelen (kennis, houding, vaardigheden)
De leerling 1. kan lengte- en oppervlaktematen omrekenen. 2. kent de begrippen <i>straal</i> en <i>diameter</i> van een cirkel. 3. kan een cirkel tekenen met een gegeven straal of diameter met een passer. 4. kent de begrippen <i>omtrek</i> en <i>oppervlakte</i> en kan deze berekenen van het vierkant, de rechthoek, de driehoek en het parallellogram. 5. kent het begrip <i>middellijn</i>. 6. kan m.b.v. de straal de diameter berekenen of andersom. 7. weet dat er een vaste verhouding bestaat tussen de diameter en de omtrek van een cirkel (1: π) 8. kan de omtrek van een cirkel berekenen met de formule: $\text{omtrek} = \pi \times \text{diameter}$ of $P = \pi d$. 9. kan de diameter of straal van een cirkel berekenen bij een gegeven omtrek. 10. weet dat oppervlakte in de formule wordt afgekort met de letter A en omtrek met de letter P. 11. kent het begrip cirkelsector.	De leerling 1. kan de oppervlakte van een cirkel benaderen door deze in een aantal even grote segmenten te verdelen en een rechthoek te leggen. 2. stelt a.d.h.v. de rechthoek van cirkelsegmenten en de formule voor de oppervlakte voor een rechthoek een formule voor de oppervlakte van een cirkel op. 3. kan de oppervlakte van een cirkel berekenen met de formule: $\text{oppervlakte} = \pi \times \text{straal} \times \text{straal}$ of $A = \pi \times r \times r$ of $A = \pi r^2$. 4. kan de diameter of straal van een cirkel berekenen bij een gegeven oppervlakte m.b.v. de formule. 5. kan de oppervlakte van een cirkel berekenen bij een gegeven omtrek. 6. kan aangeven wat er gebeurt met de oppervlakte van een cirkel als de straal wordt vergroot met een vergrotingsfactor en kan dit gebruiken.

Tijd	Klok	Leerlingactiviteit	Docentactiviteit	Materiaal
5		Binnenkomst. Plaatsnemen, spullen in de tas laten.	Leerlingen ontvangen bij de deur. Een rondje lopen en contact maken.	
5		Luisteren naar de docent. Antwoord geven op vragen van de docent.	E1: Voorkennis ophalen door opgave 8 van de vorige les te bespreken (docent laat zien hoe het had gemoeten).	Digibord <i>Powerpoint les 4</i>
5		Luisteren naar de docent. Antwoord geven op de vragen van de docent.	E2: De omtrek van de cirkel kun je inmiddels berekenen. Dit heb je nodig om te begrijpen waar de berekening voor de oppervlakte van een cirkel vandaan komt. Vandaag gaan we het namelijk weer	<i>Powerpoint les 4</i> met twee afbeeldingen met vierkant om cirkel en vierkant in cirkel.

			hebben over oppervlakte, en nu van een cirkel. Daar hebben we de kennis uit de vorige lessen voor nodig. Kijk eens naar de twee afbeeldingen op het bord. - Dit vierkant past precies om de cirkel. Welke oppervlakte is groter, die van het vierkant of van de cirkel? - Het vierkant bestaat uit 4 kleinere vierkanten. Hoe groot is de oppervlakte van zo'n kleiner vierkant? Hoe groot is de oppervlakte van het grote vierkant dan? De oppervlakte van de cirkel is dus kleiner dan $4 \times r^2$. - Op de andere afbeelding past het vierkant precies in de cirkel. Welke oppervlakte is nu groter, die van het vierkant of van de cirkel? - Dit vierkant bestaat uit 4 driehoeken. Hoe groot is de oppervlakte van zo'n driehoek? Hoe groot is de oppervlakte van het vierkant dan? De oppervlakte van de cirkel is dus groter dan $2 \times r^2$. Dus oppervlakte cirkel zit tussen de $2 \times r^2$ en $4 \times r^2$. Wat denk je dan ongeveer?	
20		Leerlingen gaan in drietallen zitten. Een aantal leerlingen helpt met het uitdelen van het materiaal. Leerlingen gaan aan de slag met het werkblad.	E3, E4 en E5a: Docent stuurt het in groepjes zitten aan. Docent deelt samen met leerlingen het materiaal uit en zet de leerlingen aan het werk. Docent haalt de opgavenbladen van de vorige les op. Docent doet de klasadministratie. Docent begeleidt het groepswork. - De docent stelt vooral gesloten vragen: "Is het zo	Opgavenblad /es 4 30 x

			dat...?", "Hoe groot is...?" - De docent is sturend of coachend.	
5		Luisteren naar de docent. Antwoord geven op de vragen van de docent.	E5b: de docent stelt centraal vragen over de inhoud van het werkblad en met name opdracht 5: - Wat hebben jullie in het groepje opgeschreven bij opdracht 5? En jullie? En waarom? - Is het gelukt om een formule op te stellen voor de oppervlakte van een cirkel? - Docent herhaalt letter A voor oppervlakte.	
10		Leerlingen gaan aan de slag met toepassingsvragen.	E6: Docent begeleidt het groepswork bij het maken van toepassingsvragen.	
		Spullen opruimen.	Afsluiting: HW opgeven. Leerlingen spullen laten opruimen.	

Fasen DI (directie instructie, Ebbens): 1. aandacht richten, 2. informatie geven, 3. check begrip/vaardigheid, 4. instructie, 5. zelfstandig werken, 6. afsluiting

Bordschema	Bijlagen (voorbereide uitleg, uitgebreid bordschema, uitgewerkte instructie, powerpoint presentatie met aantekeningen, leerlingwerkblad, lijst practicumbenodigdheden, etc.) • <i>Powerpoint les 4</i> (incl. twee afbeeldingen met vierkanten in cirkel op digibord) • <i>Opgavenblad les 4</i>
------------	---

Opgavenblad les 4 *Oppervlakte van een cirkel*

Leerling	
Andere groepsleden	
Klas	

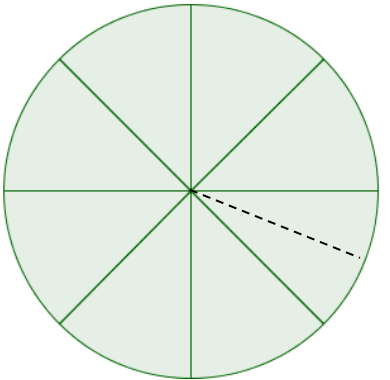
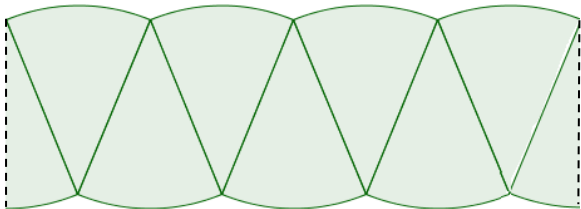
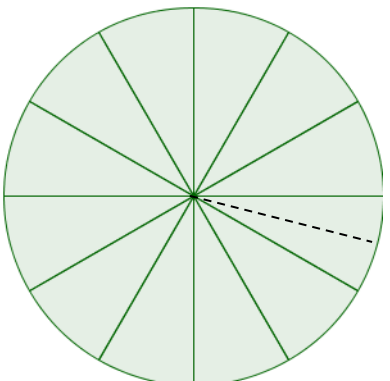
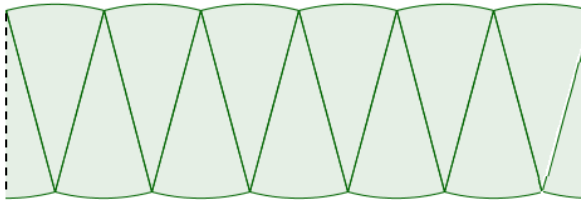
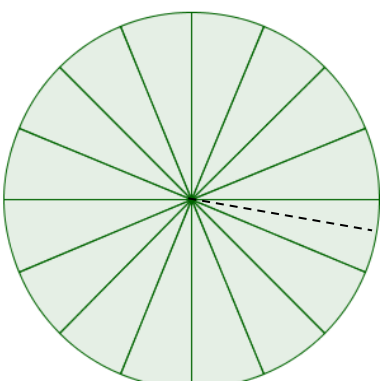
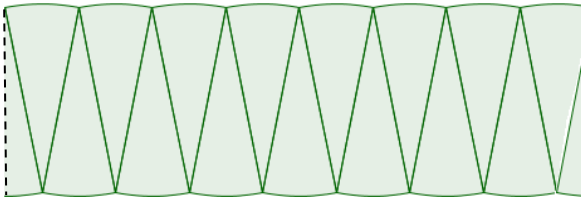
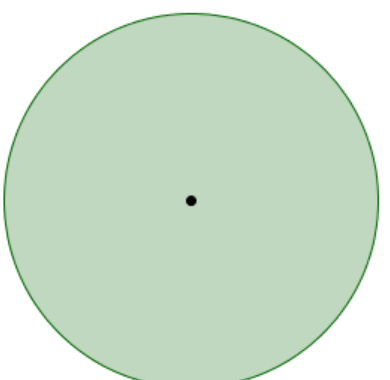
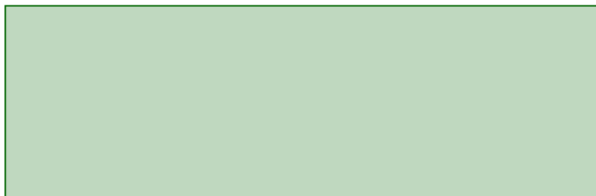
Jullie werken deze les weer samen in hetzelfde drietal.
 Het maken van de opdrachten en het denkwerk doen jullie voor een groot deel samen.
 Je begint pas aan een opdracht als ieder groepslid weet wat de bedoeling is.

Aan het einde van de les kunnen jullie de oppervlakte van een cirkel berekenen.

Opdracht 1

In de onderstaande tabel is een cirkel met een straal van 2,5 cm steeds verdeeld in een aantal even grote stukken. Deze stukken zijn vervolgens tegen elkaar aangelegd. Eén stuk is in tweeën geknipt en aan de zijkanten gelegd.

Teken in de 3 gelegde figuren een rechthoek die de oppervlakte van het figuur benadert.

	
	
	
	 <i>Stel je voor dat de cirkel in duizenden gelijke stukken is verdeeld</i> <i>Dan zouden de randen van het gelegde figuur er zoals hierboven uitzien.</i>

Opdracht 2

Wat valt jullie op aan de rechthoeken die jullie hebben getekend in vergelijking met de verschillende gelegde figuren?

Opdracht 3

De gelegde figuren gaan steeds meer op een rechthoek lijken.

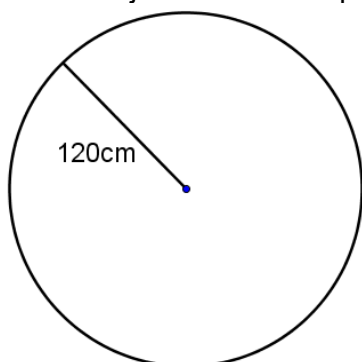
Hoe groot is de hoogte van de rechthoek die je steeds hebt getekend? Kijk daarvoor goed naar hoe de figuren zijn ontstaan. Leg je antwoord uit.

De andere zijde van de rechthoek valt steeds meer samen met de boogjes, en in het laatste voorbeeld zijn ze precies gelijk aan elkaar. Hoe lang is deze andere zijde van de rechthoek? Kijk daarvoor weer goed naar hoe de figuren zijn ontstaan. Leg je antwoord uit.

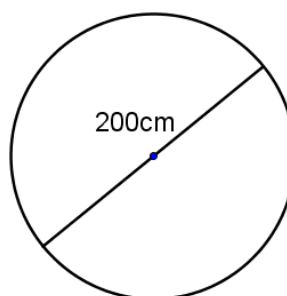
Bereken nu de oppervlakte van de rechthoek.

Opdracht 4

Hieronder staat een schets van twee cirkels. Bereken van beide cirkels de oppervlakte in m^2 . Rond je antwoord af op één decimaal.



Straal = 120 cm
Omtrek =
Oppervlakte =



Diameter = 200 cm
Omtrek =
Oppervlakte =

Opdracht 5

Leg uit hoe je de oppervlakte van een cirkel kunt berekenen. Schrijf jullie bevinding hieronder op. Probeer samen tot een formule te komen waarin je alleen de variabele 'straal' gebruikt.

Opdracht 6

Van een cirkel is de oppervlakte 54 cm^2 . Bereken de straal van de cirkel. Rond je antwoord af op één decimaal.

Hoeveel cm is de omtrek van de cirkel?

Van een andere cirkel is de omtrek 50 dm. Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van deze cirkel? Rond tussentijds niet af. Laat tussentijds het antwoord op je rekenmachine staan.

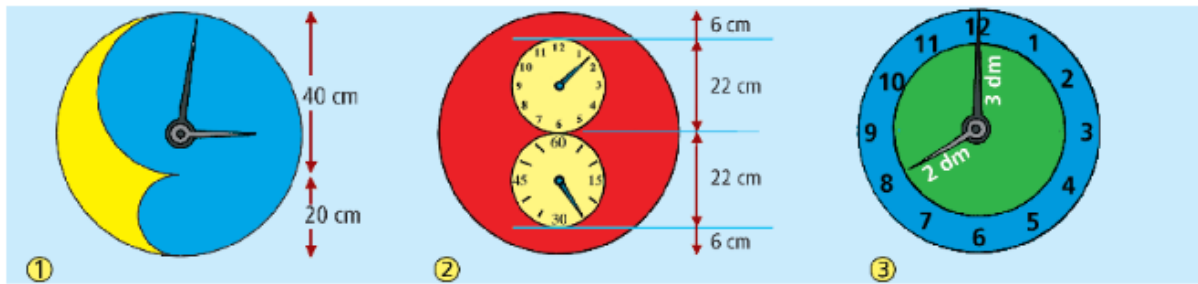
Opdracht 7

Bereken de oppervlakte van een cirkel met een straal van 8 cm.

Met welk getal wordt de oppervlakte vermenigvuldigd als je de straal van de cirkel drie keer zo groot maakt? Waar komt dit getal vandaan?

En met welk getal wordt de omtrek vermenigvuldigd als je de straal van de cirkel drie keer zo groot maakt? Weten jullie ook waarom?

Opdracht 8



Het lichtgekleurde stuk van klok 1 wordt bedekt met een laagje emaille (gesmolten glas). De prijs daarvan is 16 cent per cm^2 . Hoeveel euro kost dat in totaal? Rond af op hele euro's.

Hoeveel procent van klok 2 is donkergekleurd? Rond af op hele procenten.

Bereken van klok 3 de oppervlakte van de buitenrand. Rond je antwoord af op hele cm^2 .

Bijlage 6: Ingevulde onderzoeksinstrumenten

Bijlage 6.1: Ingevulde schema's bij de video-analyse

Per les is in het eerste schema iedere 6E-fase omschreven en zaken die op zijn gevallen zijn genoteerd. Er is een onderscheid gemaakt tussen docent- en leerlingactiviteiten. Bij de leerlingactiviteiten wordt ook iets gezegd over de resultaten uit de analyse van de opgavenbladen. Dit geeft een beter beeld van de betreffende fase.

In het tweede schema is een beoordeling gemaakt van de kwaliteit van de 6E-fase door het lesverloop te vergelijken met de suggesties uit de overzichtskaart van het 6E-model. Voor de eerste twee lessen is deze beoordeling ook toegelicht om te verduidelijken hoe deze tot stand is gekomen.

Les 1 Oppervlakte van een parallellogram

Datum: 22 maart 2016
Tijd: 13:45 – 14:35
Lokaal: 44

Uitspraken over de tijdplanning:	E1 en E2 gingen qua tijd goed, want daar is in de les een paar minuten aan besteed.
Tot waar zijn de meeste groepjes gekomen?	E3 duurde te lang (bij sommige groepjes meer dan een kwartier). Daardoor zijn de meeste leerlingen slechts bij opgave 3 of 4 gekomen (fase E3 / E4). E5b heeft daardoor plaatsgevonden terwijl nog niet alle leerlingen E5a hadden doorlopen.
Wat koste meer/minder tijd dan gepland?	E6 hebben de meeste leerlingen geheel thuis moeten doen.

	Acties van de docent	Acties van de leerlingen
E1 Evalueren van de begincompetenties 03:57 – 07:15	Voorkennis klassikaal ophalen a.d.h.v. vragen stellen die ondersteund worden door afbeeldingen op het digibord. Definities van begrippen worden gevraagd (Wat komt bij je op al je denkt aan...?). De toepassing op eenvoudige voorbeelden wordt gevraagd. Veel verschillende leerlingen krijgen de beurt.	Luisteren en antwoord geven op vragen waarbij leerlingen verschillende eigen definities van begrippen geven. Lengte x breedte wordt twee keer genoemd als definitie van oppervlakte. Op eenvoudige voorbeelden worden de juiste berekeningen toegepast.
E2 Engageren 07:15 – 09:52	Twee figuren worden vergeleken en er worden vragen bij gesteld. Er wordt een stemming/poll gehouden: wie denkt dat ... groter is? En wie denkt ...? Het juiste antwoord wordt nog bewaard. Gevraagd wordt naar een extreem voorbeeld waarvan op het oog zeker is welke van de twee opties groter is. Er wordt aangegeven dat de leerling aan het einde van de les met de nieuwe kennis tot het juiste	Luisteren en antwoord geven op vragen. Vinger opsteken: minder dan de helft denkt optie 1, 1 iemand denkt optie 2, de rest denkt even groot of weet het niet. Een leerling geeft kort na de vraag over een extreem geval waar je het zeker van weet een juist antwoord.

	antwoord moet kunnen komen via een berekening. Veel verschillende leerlingen krijgen de beurt.	
E3 Exploreren 09:52 – ?	Bij 09:52 wordt een instructie gegeven: straks in deze groepjes zitten, lijm en schaar nodig, achter opgavenblad zit werkblad wat je bij opgave 1 nodig hebt. De opgavenbladen worden uitgedeeld. Een groepje wordt aan het werk gezet: je hebt de tijd hard nodig. Na een paar minuten klassikaal: “Lees eens goed bij opgave 1 wat de bedoeling is. Je moet er iets mee doen, je moet hem niet alleen uitknippen en opplakken. Je moet hem 1 of 2 keer over de roosterlijn knippen zodat je er een rechthoek van kunt leggen. Je plakt uiteindelijk dus ook een rechthoek op.” De docent loopt rond en begeleidt zonder voor te zeggen. Hij stelt gesloten vragen. Bij 25:49 geeft de docent aan dat het de bedoeling is dat de leerlingen met het knippen en plakken al klaar zijn. “Kom je daar toch niet uit, geef het aan dan kom ik je helpen”.	In groepjes zitten. Samen aan de slag met het opgavenblad. Sommige groepjes komen niet uit opgave 1. Daar zijn de leerlingen ook lang mee bezig. Sommigen lezen slecht: ze knippen alleen het parallellogram uit en plakken het op. Anderen knippen vaker dan toegestaan. Het laatste parallellogram van de drie is erg lastig. Soms is het zo dat de zwakke leerling die parallellogram toevallig krijgt. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat bij opgave 3 vaak de rechthoek wordt getekend die kan worden gemaakt, en niet alleen de hoogte (alleen een lijnstuk). De leerlingen houden vast aan het idee dat je er een rechthoek mee kan maken en zien niet dat je de lengte en breedte van die rechthoek direct al in het parallellogram kan aangeven. In sommige groepjes wordt er niet goed samengewerkt. Leerlingen lopen weg en gaan na een correctie van de docent weer terug naar het groepje. Andere dwalen af. Sommige leerlingen werken sneller of juist langzamer dan de rest van het groepje. Ze nemen soms weinig moeite om elkaar te helpen en het elkaar uit te leggen.
E4 Empirische kennis toepassen ? - ?	Bij 36:00 geeft de docent aan dat hij de laatste 5 minuten van de les wil gebruiken om elkaars bevindingen centraal uit te wisselen. Dan kan hij ook nog zien waar het mis is gegaan of hij kan corrigeren.	Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat opgave 4 goed wordt gemaakt, alleen gaan leerlingen regelmatig het parallellogram in gedachte (hulplijnen zijn getekend) verknippen tot een rechthoek, i.p.v. op zoek te gaan naar een basis en een bijbehorende hoogte.
E5a Zelfstandig expliciteren ? - ?		De meeste leerlingen zijn hier niet aan toegekomen. Zij hebben wel meegeluisterd bij E5b en hebben daar vervolgens hun antwoord op vraag 5 op kunnen baseren of direct meegeschreven.

E5b Klassikaal expliciteren 41:30 – 46:30	De docent vraagt wat de leerlingen die opgave 5 al hebben gemaakt daar hebben opgeschreven. Van twee groepjes is dit centraal aanbod gekomen. De docent schrijft de bevindingen op het digibord. De docent vraagt door, maar wel met open vragen: “Kun je me meer vertellen over die basis en die hoogte?” De docent blijft bij het vragen van toepassingen op nieuwe voorbeelden hangen bij één leerling die antwoord geeft op de belangrijkste ‘begripsvragen’. Er komen geen voorbeelden met getallen aan bod. De bel gaat. De docent wil nog afronden. Bij het laatste voorbeeld laat de docent zien hoe het moet. Hij betreft daar geen leerlingen meer bij.	Niet iedereen kon antwoord geven doordat ze E5a nog niet hadden doorlopen. De antwoorden die werden gegeven klopten. Er zijn weinig verschillende leerlingen aan bod geweest. De meesten hebben geluisterd. Sommigen waren met hun aandacht zichtbaar ergens anders.
E6 Eindcompetenties consolideren <i>Niet in de les</i>	Dit heeft nauwelijks in de les plaatsgevonden. Een aantal groepjes zijn wel met de laatste opgaven bezig geweest. Daar heeft de docent soms moeten begeleiden (bijv. opgave 6). Er is niet teruggekeken naar de afbeelding met de twee figuren van het begin van de les.	Sommige leerlingen zijn wel al toegekomen aan E6 in de les voordat E5b had plaatsgevonden. De leerlingen hebben het afmaken van het opgavenblad als huiswerk meegekregen voor de volgende dag. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat leerlingen opgave 6 en 7 niet hebben gemaakt of er niet uitkwamen.

6E-fase	Acties van de docent	Acties van de leerlingen	Toelichting
E1 Evalueren van de begincompetenties			De docent evalueerde relevante voorkennis door naar definities van begrippen te vragen en de stelling van Pythagoras te herhalen. De leerlingen rakelen begrippen en concepten op die voor deze les nodig waren.
E2 Engageren			De interesse en het engagement worden opgewekt. De docent prikkelt de leerlingen met een boeiend instapvraag door een stemming te houden: welke is groter? Verskillende antwoorden worden gegeven. De leerlingen ontdekken daardoor een motivatie voor de les.
E3 Exploreren			De docent heeft wel goed nagedacht over de gekozen voorbeelden, maar één voorbeeld bleek in de praktijk te lastig. Het

			introduceren van nieuwe terminologie via de opgavenbladen ging niet vlekkeloos. De begrippen basis en hoogte werden niet duidelijk. Leerlingen bleven vasthouden aan de rechthoeken die je kon maken, i.p.v. de nieuwe begrippen te gebruiken. De docent heeft gesloten vragen gesteld en heeft leerlingen in drietallen coöperatief laten leren.
E4 Empirische kennis toepassen			De docent heeft opgaven geselecteerd die leerlingen kunnen maken na fase E3. De leerlingen hebben de zojuist ontdekte wetmatigheid toegepast in nieuwe contextloze voorbeelden.
E5a Zelfstandig expliciteren			De docent heeft gezorgd voor een opgave waarin leerlingen de ontdekte wetmatigheid uit de voorafgaande concrete voorbeelden moesten formuleren. Sommige leerlingen zijn hier niet aan toe gekomen. Sommige leerlingen hebben bij de formulering geen formele wiskundetaal gebruikt.
E5b Klassikaal expliciteren			De docent heeft van twee groepjes naar de formulering van de ontdekte wetmatigheid gevraagd, en heeft doorgevraagd via open vragen. Bij nieuwe voorbeelden zijn waarom-vragen gesteld. Hij heeft toegezien op het gebruiken van wiskundige begrippen. Bij het laatste voorbeeld heeft de docent het zelf voorgedaan. De bel was al gegaan. Maar een paar leerlingen zijn klassikaal aan het woord geweest. De meesten hebben geluisterd. Sommigen waren met hun aandacht ergens anders.
E6 Eindcompetenties consolideren			In de les heeft de toepassing van de nieuwe kennis nauwelijks plaatsgevonden. De meeste leerlingen hebben daar geen tijd voor gehad. Daar waar nodig heeft de docent zich opgesteld als coach. De docent had weinig tijd voor differentiatie. Hij is niet teruggekomen op de onopgeloste instapvraag van E2. Twee zwakke leerlingen heeft hij nog extra uitleg gegeven voordat zij het lokaal verlieten. Uit de analyse van opgavenbladen bleek dat de leerlingen nauwelijks zelfstandig uit de toepassingsvragen kwamen.

Les 2 Oppervlakte van een driehoek

Datum: 23 maart 2016
Tijd: 08:45 – 09:35
Lokaal: 22

Uitspraken over de tijdplanning:	E1 duurt 11 minuten. E2 duurt minder dan 2 minuten. E3 kost beduidend minder tijd dan in de vorige les. De meeste groepjes zijn aan E5a toegekomen vóór de klassikale bespreking (E5b). De leerlingen hebben ook nog tijd gehad om in drietallen aan de toepassingsvragen te werken (E6).
Tot waar zijn de meeste groepjes gekomen?	
Wat koste meer/minder tijd dan gepland?	

	Acties van de docent	Acties van de leerlingen
E1 Evalueren van de begincompetenties 09:50 – 20:45	De vorige les geldt als voorkennis voor deze les (oppervlakte parallellogram). In de vorige les is de docent in E6 niet teruggekomen op de prikkelende instapvraag waarbij een stemming werd gehouden. Dat heeft de docent nu alsnog gedaan. Daarbij heeft 1 leerling antwoord gegeven op de vraag welke nou groter was. Daarna heeft de docent laten zien hoe twee van de vier voorbeelden van opgave 6 en heel opgave 7 hadden gemoeten. De docent gebruikt heel veel woorden, vertelt veel, herhaalt veel van wat hij zegt. De bespreking neemt daardoor veel tijd in beslag. Bij opgave 7 betreft hij de leerlingen wat meer door vragen te stellen waar korte antwoorden op worden verwacht.	Een leerling geeft aan opgave 6 moeilijk te vinden. De leerlingen luisteren. De leerling die antwoord geeft op de instapvraag van gisteren pakt het aan via verknippen en niet direct met het gebruik van de basis en de hoogte. Een leerling is in verwarring bij een voorbeeld van opgave 6. De docent kantelt daarvoor het figuur, waarmee voor de leerling duidelijk wordt wat de juiste hoogte is. De leerlingen geven korte antwoorden op vragen van de docent, of rekenen iets voor hem uit op de rekenmachine. Sommige leerlingen begrepen er nog steeds weinig van.
E2 Engageren 21:00 – 22:20	Drie driehoeken worden vergeleken. Er wordt een stemming/poll gehouden: wie denkt dat ... het grootst is? En wie denkt ...? Het juiste antwoord wordt nog bewaard voor het einde van de les. Er wordt aangegeven dat er aan het einde van de les naar de driehoeken wordt gekeken en de leerlingen dan tot het juiste antwoord moeten kunnen komen.	Vinger opsteken: 8 denken de blauwe, 8 ook de rode, en 1 denkt de gele. Een deel heeft zijn vinger niet opgestoken.

E3 Exploreren 22:20 – ?	Bij 22:20 wordt een instructie gegeven: straks weer in groepjes zitten met opgavenblad, beter lezen wat de bedoeling is, samenwerking moet beter dan gisteren: neem de moeite het elkaar uit te leggen, begin pas aan een opgave als iedereen de vorige opgave begreep. De opgavenbladen worden uitgedeeld. Die van de vorige les worden opgehaald. De docent loopt rond en begeleidt zonder voor te zeggen. Hij stelt gesloten vragen. De docent bewaakt het werktempo van een aantal groepjes. De docent houdt toezicht op of sterke leerlingen niet te snel gaan voor de zwakke leerlingen en de moeite nemen om het elkaar uit te leggen. Hij spreekt ook een leerling aan die voorloopt op de andere groepsleden.	In groepjes zitten. Samen aan de slag met het opgavenblad. Bij opgave 1 blijkt je op 2 manieren een parallellogram van het paar driehoeken te kunnen leggen. Leerlingen stellen vragen welke twee nou bij elkaar horen als paar. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat de exploreeropgaven goed zijn gemaakt. Bij het trekken van een conclusie over de oppervlakte van één driehoek t.o.v. het parallellogram wordt soms slecht gelezen.
E4 Empirische kennis toepassen ? – ?	De docent spreekt de leerlingen aan op de samenwerking: je loopt niet voor op je groepsleden, je begint pas als iedereen het snapt, leg het elkaar uit. De docent loopt rond en begeleidt.	De meeste groepjes werken door en kunnen zelfstandig werken aan het opgavenblad. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat opgave 4 door de hele klas goed is gemaakt.
E5a Zelfstandig expliciteren ? – ?		De meeste groepjes hadden opgave 5 gemaakt vóór de klassikale terugkoppeling. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat bij opgave 5 meestal het antwoord basis x hoogte : 2 wordt gegeven zonder verdere toelichting.
E5b Klassikaal expliciteren 49:05 – 54:50	De docent vraagt wat de leerlingen hebben opgeschreven bij opgave 5. Van twee groepjes is dit centraal aanbod gekomen. De docent schrijft de bevindingen op het digibord. De docent vraagt een ander groepje naar het waarom: hoe komen zij daar bij? De docent vraagt door en gebruikt nieuwe voorbeelden. Soms geeft de docent een eigen interpretatie van wat de leerling heeft gezegd en stuurt hij daarmee het gesprek. Hij stipt opgave 7 aan en vertelt dat	De leerlingen luisteren en geven antwoorden op vragen van de docent. Eén leerling komt aan het woord bij het uitleggen van de ontdekte formule.

	je binnen een driehoek iedere zijde als basis kan kiezen met een bijbehorende hoogte. Hij betreft daar geen leerlingen meer bij.	
E6 Eindcompetenties consolideren 54:50 – 58:15	De docent komt terug op de prikkelende instapvraag van E2. Hij legt daarvoor de driehoeken op elkaar en vraagt wat opvalt. In interactie met de leerlingen wordt de conclusie getrokken dat de driehoeken even groot zijn. De docent loopt nog rond en biedt hulp. De docent differentieert in de hulp die hij aanbiedt. Dit vond deels ook al plaats vóór fase E5b.	Sommige leerlingen zijn vóór E5b al bij de toepassingsvragen. De meeste groepjes werken door en kunnen zelfstandig in de drietallen werken aan het opgavenblad. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat bij opgave 6 fouten worden gemaakt bij het berekenen van de hoogte. Pythagoras wordt verkeerd ingevuld, of de zijde wordt als hoogte gezien terwijl die niet loodrecht staat op de basis. Bij opgave 7 gaat de tweede vraag regelmatig fout. Opgave 8 is regelmatig niet gemaakt. Sommige leerlingen kwamen er wel uit.

6E-fase	Acties van de docent	Acties van de leerlingen	Toelichting
E1 Evalueren van de begincompetenties			De vorige les geldt als voorkennis, maar meerdere leerlingen gaven aan dat opgavenblad lastig te vinden. De docent evalueerde relevante voorkennis door naar zowel de instapvraag als 2 belangrijke opgaven van de vorige les te kijken. Hij doet dit weinig interactief en doet vooral voor. Hij neemt hier 10 minuten de tijd voor. De leerlingen krijgen daarmee begrippen en concepten herhaald die voor deze les nodig waren. Een leerling die het niet begreep gaf dit aan. De docent kon dat herstellen.
E2 Engageren			De interesse en het engagement worden opgewekt. De docent prikkelt de leerlingen met een boeiend instapvraag door een stemming te houden: welke van de drie gekleurde driehoeken is het grootst? De klas is verdeeld. De leerlingen ontdekken daardoor een motivatie voor de les.
E3 Exploreren			De docent heeft goed nagedacht over de gekozen voorbeelden. Ieder voorbeeld blijkt op 2 manieren te kunnen, die tweede manier is niet handig voor het vervolg. Gelukkig kiezen bijna alle leerlingen voor de gewenste manier. De begrippen basis en hoogte worden gecheckt doordat ze in een tekening aangegeven moeten worden. Dat wordt goed gedaan. De leerlingen gebruiken de kennis van de vorige les succesvol om zelf nieuwe wetmatigheden te ontdekken in de aangereikte

			voorbeelden. De docent heeft gesloten vragen gesteld en heeft leerlingen in drietallen coöperatief laten leren. Hij heeft dit coöperatief leren bewaakt.
E4 Empirische kennis toepassen			De docent heeft opgaven geselecteerd die leerlingen kunnen maken na fase E3. De leerlingen hebben de zojuist ontdekte wetmatigheid toegepast in nieuwe contextloze voorbeelden.
E5a Zelfstandig expliciteren			De docent heeft gezorgd voor een opgave waarin leerlingen de ontdekte wetmatigheid uit de voorafgaande concrete voorbeelden moesten formuleren. Een klein aantal leerlingen heeft bij de formulering geen of onjuiste formele wiskundetaal (wiskundige begrippen) gebruikt.
E5b Klassikaal expliciteren			De docent heeft van twee groepjes naar de formulering van de ontdekte wetmatigheid gevraagd, en hij heeft bij een ander groepje doorgevraagd naar het waarom. Daarbij heeft hij nieuwe voorbeelden aangehaald om de betreffende leerling te stimuleren tot een juiste redenering te komen. Hij heeft toegezien op het gebruik van wiskundige begrippen en heeft bij onjuiste formele wiskundetaal gewacht op reacties uit de klas. Bij het aanstippen van een voorbeeld heeft de docent zelf het een en ander toegelicht. Een paar leerlingen zijn klassikaal aan het woord geweest. De rest heeft geluisterd.
E6 Eindcompetenties consolideren			De docent komt terug op de prikkelende instapvraag van E2. De docent loopt nog rond en biedt hulp. Hij stelt zich op als coach. De docent differentieert in de hulp die hij aanbiedt. De meeste groepjes werken door en vertonen zelfredzaamheid. De toepassingsopgaven zijn wisselvallig gemaakt.

Les 3 Omtrek van een cirkel

Datum: 30 maart 2016
Tijd: 08:45 – 09:35
Lokaal: 22

Uitspraken over de tijdplanning:	De les verliep verder volgens de tijdsplanning. De opbouw van de 6 fases week iets af van de voorbereiding. De veranderde volgorde is in het onderstaande schema aangehouden. De eerste 10 minuten zijn besteed aan het bespreken van de vorige les. Dit geldt niet als voorkennis voor deze les, dus zou kunnen worden gezien als verlenging van E6 van de vorige les, en dan als het evalueren van de leerwinst van die les. Dit gebeurde weinig interactief, dus van aantonen van de leerwinst door leerlingen is minder sprake. Hierna is overgegaan op E2.
Tot waar zijn de meeste groepjes gekomen?	Daarna heeft de docent nog kort, minder dan een minuut, aandacht besteed aan het evalueren van de voorkennis. E1 volgde dus op E2. Vervolgens zijn de fase E3 t/m E6 in chronologische volgorde doorlopen.
Wat koste meer/minder tijd dan gepland?	

	Acties van de docent	Acties van de leerlingen
E6 Eindcompetenties consolideren 06:20 – 15:50	De docent bespreekt een deel van opgave 7 en geheel opgave 8 van het opgavenblad. De tweede vraag van opgave 7 is overgeslagen, terwijl uit de latere analyse van het opgavenbladen bleek dat de leerlingen vooral die vraag lastig vonden. Bij het bespreken van opgave 7 is de docent regelmatig onduidelijk in zijn vraagstelling, toch worden de gewenste antwoorden gegeven. Van opgave 8 heeft de docent beide deelvragen uitgewerkt. Dat kost veel tijd. Hij twijfelt soms over zijn aanpak en maakt ook fouten in de uitwerking. Hij wordt twee keer gecorrigeerd door leerlingen.	De leerlingen luisteren en geven soms met name korte antwoorden op vragen. De bespreking van opgave 7 gebeurt interactief. Eén leerling wordt gevraagd het waarom achter zijn antwoord te geven. Bij de bespreking van opgave 8 is nagenoeg alleen de docent aan het woord, maar een leerling corrigeert hem tot twee keer toe.
E2 Engageren 15:50 – 21:00	Het engageren via een afbeelding op het digibord verloopt rommelig. De docent stelt open vragen, maar geeft weinig bedenktijd. Ook geeft hij vooraf niet aan waarnaar toe wordt gewerkt, wat het doel is. Hij zegt: "ik help even op weg", terwijl voor de leerlingen niet duidelijk is waar die weg naar toe gaat. De docent stelt gesloten vragen. Deze kunnen de leerlingen beantwoorden. Hij sluit af met een benadering voor de omtrek van een cirkel met eens straal van 10 cm. De docent heeft alle tussenstappen gezet.	De leerlingen krijgen weinig tijd om de afbeelding te bestuderen, doordat de docent snel gesloten vragen gaat stellen en sturing geeft. Daardoor worden leerlingen minder gestimuleerd initiatief te nemen. Uit de klas komen wel direct antwoorden op vragen van de docent.

E1 Evalueren van de begincompetenties 21:00 – 21:35	De docent evalueert kort de voorkennis door te vragen naar de begrippen straal en diameter en hoe die zich tot elkaar verhouden, hoe je de een kan berekenen als je de ander weet.	De leerlingen luisteren en geven korte antwoorden op vragen van de docent.
E3 Exploreren 21:35 – ?	De docent geeft aan: “Voordat je direct gaat knippen, lees eerst goed wat de bedoeling is. Werk ook samen, ga pas verder als iedereen de opdracht snapt.” De docent deelt samen met leerlingen materiaal uit. De docent zorgt ervoor dat klassikaal de gegevens van opgave 1 worden uitgewisseld: “schrijf direct mee”. Daarna stelt hij nog wat verdiepende vragen (over meetfouten). Daardoor duurt dit wat langer dan verwacht. De docent corrigeert een leerling die buiten zijn groepje om bezig is.	In groepjes zitten. Samen aan de slag met het opgavenblad. Opgave 1 gaat gemakkelijk. De leerlingen zijn na een paar minuten klaar met het meten. Bij de klassikale uitwisseling is het 1 groepje niet gelukt om tot de factor te komen. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat ook de andere exploreeropdrachten goed worden gemaakt.
E4 Empirische kennis toepassen ? – ?	De docent wijst er klassikaal op dat bij opgave 4 de straal is gegeven. De docent loopt rond en begeleidt.	De groepjes werken door en kunnen zelfstandig werken aan het opgavenblad. Opgave 4 van het opgavenblad wordt goed gemaakt.
E5a Zelfstandig expliciteren ? – ?		Ieder groepje heeft opgave 5 gemaakt vóór de klassikale terugkoppeling. Sommige groepjes hadden opgave 6 ook al gemaakt. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat bij opgave 5 veel verschillende antwoorden worden gegeven waar wel de juiste gedachte achter zit. Uit slechts een paar antwoorden blijkt dat er nog geen begrip is van een <u>vaste</u> verhouding tussen diameter en omtrek van een cirkel. Een herhalende uitwerking bij opgave 6 is die waarbij niet wordt vergeleken met de eigen factor en het eigen voorwerp, maar met het antwoord op opgave 4. Het gewenste antwoord bij vraag 5 wordt dan eerder al gegeven, 1 keer bij vraag 2 en 6 keer bij vraag 3. De vraagstelling is misschien onduidelijk.

E5b Klassikaal expliciteren 46:00 – 51:40	De docent vraagt aan drie groepjes wat ze hebben opgeschreven bij opgave 5 en schrijft dit op het digibord. De docent zet een verwoording van een leerling om in formele wiskundetaal. 1 groepje komt met een juiste inbreng maar deze zou leiden naar $\text{diameter} = \text{omtrek} : \text{factor}$. De docent stuurt dit naar $\text{omtrek} = \text{diameter} \times \text{factor}$. Een leerling komt met π. De docent gaat daar op in. Hij introduceert π als factor en laat de knop daarvoor op de rekenmachine zien.	De leerlingen luisteren en leerlingen uit drie verschillende groepjes geven antwoorden op vragen van de docent. Een leerling herkent π als factor.
E6 Eindcompetenties consolideren 51:40 – 55:00	De docent komt niet meer terug op de afbeelding uit E2, terwijl achteraf daar het verloop van de les mee viel samen te vatten (de factor begon bij 3, toen gezamenlijk gekomen op 3,445 en uiteindelijk weten we 3,1415...) De docent loopt nog rond en biedt hulp/coacht. De docent differentieert in de hulp die hij aanbiedt. Twee zwakke leerlingen heeft hij nog extra uitleg gegeven voordat zij het lokaal verlieten.	De meeste groepjes werken door en kunnen zelfstandig in de drietallen werken aan het opgavenblad. Een leerling wijst op een nummeringsfout in het opgavenblad. De toepassingsopgaven gaan vrij goed. Bij de laatste vraag van opgave 7 wordt vaak vergeten nog te delen door 2 voor de straal. Leerlingen hebben moeite met de laatste vraag van opgave 8. Die wordt opengelaten of fout gemaakt. Opgave 9 gaat vervolgens bij de meeste leerlingen goed. Soms worden er kleine foutjes gemaakt.

6E-fase	Acties van de docent	Acties van de leerlingen
E6 Eindcompetenties consolideren		
E2 Engageren		
E1 Evalueren van de begincompetenties		
E3 Exploreren		
E4 Empirische kennis toepassen		
E5a Zelfstandig expliciteren		
E5b Klassikaal expliciteren		
E6 Eindcompetenties consolideren		

Les 4 Oppervlakte van een cirkel

Datum: 4 april 2016
Tijd: 12:55 – 13:45
Lokaal: 43

Uitspraken over de tijdplanning:	E1 en E2 zijn verlopen volgens tijdsplanning. Het exploreren, E3, heeft langer geduurd dan verwacht. Leerlingen kwamen niet zelfstandig verder, waardoor het veel tijd in beslag nam. E4 en E5b hebben nog in de les plaatsgevonden. Veel leerlingen hebben E5a overgeslagen. De laatste paar minuten hebben de leerlingen met de inmiddels bekende formule kunnen werken aan de overige opgaven (E6).
Tot waar zijn de meeste groepjes gekomen?	
Wat koste meer/minder tijd dan gepland?	

	Acties van de docent	Acties van de leerlingen
E1 Evalueren van de begincompetenties 05:10 – 10:30	De vorige les geldt als voorkennis voor deze les (omtrek cirkel). In de vorige les is de docent in de afsluiting niet teruggekomen op de instapdemonstratie, de exploreerfase en de kennismaking met π , terwijl daar het verloop van de les mee viel samen te vatten (de factor begon bij 3, toen gezamenlijk gekomen op 3,445 en uiteindelijk weten we 3,1415...). Deze les is de docent daar wel mee begonnen. Hij vertelt, de leerlingen luisteren. De terugblik op de vorige les vond verder plaats met de bespreking van opgave 8. De docent laat zien hoe die opgave had gemoeten, de leerlingen luisteren en kijken mee.	Eén leerling geeft aan niet uit de laatste opgaven van het opgavenblad van de vorige les te komen. De docent geeft aan alleen naar opgave 8 te kijken gezien de tijd. De leerlingen luisteren en letten op.
E2 Engageren 10:30 – 14:30	Het engageren gebeurt via twee afbeelding op het digibord. De docent stelt eerst open vragen, maar geeft weinig bedenktijd. Hij gaat snel over op gesloten vragen. Ook geeft hij vooraf niet aan waarnaar toe wordt gewerkt, wat het doel is. Hij leidt de afbeelding niet in. De gesloten vragen kunnen de leerlingen beantwoorden. Hij sluit af met een leerling de schatting te laten geven voor de oppervlakte als die tussen $2r^2$ en $4r^2$ moet liggen. De docent heeft alle tussenstappen gezet.	Verschillende leerlingen komen aan de beurt bij het beantwoorden van de gesloten vragen. Een leerling vraagt waarom de linker afbeelding gelijk is aan $2r^2$. De docent laat zien hoe je het vanuit een andere invalshoek kunt bekijken en tot hetzelfde antwoord komt.

E3 Exploreren 14:30 – ?	De docent geeft instructie: “Je krijgt een nieuw opgavenblad. Bij de eerste opgave hoef je niks te knippen of te plakken, maar die eerste opgave is heel belangrijk. Probeer daar eerst door goed te lezen en samen te werken zelf uit te komen. Kom je daar niet uit dan loop ik rond om te helpen. Ik wil dat je het eerst zelf probeert.” De docent deelt het materiaal uit. De docent vraagt leerlingen in hun groepje te gaan zitten. De docent loopt rond en helpt intensief op weg via gesloten vragen. Om 29:15 geeft de docent centraal hulp: “Ik wil dat iedereen meekijkt. Bij opdracht 3 de tweede vraag... Bij de eerste vraag wordt iets gezegd over de hoogte van dat rechthoek steeds. Ik denk dat de meeste daar wel uitkomen, uit die hoogte. Over hoe groot die is en waarom die ook zo groot is. Over de breedte kun je zeggen dat die steeds meer samenvalt met die boogjes. Nu is het de bedoeling dat je bij die tweede vraag niet aangeeft hoeveel cm die is, maar dat je een beredenering geeft wat je kunt zeggen over de breedte van die rechthoek. Dus ze vragen niet naar een getal, maar ze vragen naar hoe ontstaat de breedte van de rechthoek. Waar is die gelijk aan? En in het onderste voorbeeld valt ie precies samen met een deel van de boogjes. Ik probeer het zo een beetje te sturen. Als je er niet uitkomt, wil ik dat je het aangeeft. Opgave 3 is namelijk heel belangrijk om het vervolg te kunnen maken. Kom je daar niet uit, steek je vinger op, dan kom ik je helpen.”	In groepjes zitten. Samen aan de slag met het opgavenblad. Het duurt vergeleken met de andere lessen langer voordat de groepjes in het drielal serieus aan de slag gaan. Het exploreren neemt ook veel tijd in beslag. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat de eerste exploreeropgave nog bij het merendeel goed gaat. Tijdens de les leek slechts 1 groepje ook grotendeels zelfstandig uit het vervolg te komen. De andere groepjes hebben meer hulp nodig. Bij opgave 2 worden weinig juiste antwoorden gegeven. De getekende rechthoeken zijn namelijk niet even groot qua oppervlakte. Bij opgave 3 gaan leerlingen meten i.p.v. te redeneren vanuit hoe het figuur is ontstaan. De vraagstelling had meer kunnen sturen naar het gewenste antwoord, en er had met het opmeten meer rekening kunnen worden gehouden.
---------------------------------------	--	--

E4 Empirische kennis toepassen ? – ?	De docent loopt rond en begeleidt.	Op de video-opname is te zien dat sommige groepjes niet verder werken, omdat ze niet zelfstandig verder kunnen. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat opgave 4 grotendeels goed wordt gemaakt. Het is soms niet duidelijk of leerlingen hiervoor de klassikaal opgestelde formule hebben gebruikt. Sommige leerlingen moesten na de klassikale bespreking opgave 4 nog maken.
E5a Zelfstandig expliciteren ? – ?		Weinig groepjes zijn bij opgave 5 gekomen vóór de centrale uitwisseling. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat bij opgave 5 bijna alleen delen van of de complete klassikale bespreking zijn opgeschreven. Het is onduidelijk wel gedeelte leerlingen zelf hebben verwoord en tot welke wetmatigheden ze zelf zijn gekomen.
E5b Klassikaal expliciteren 43:20 – 50:10	De docent zorgt niet voor uitwisseling van de bevindingen van opgave 5, aangezien de groepjes daar nog niet waren. Hij zorgt ervoor dat klassikaal de formule voor de oppervlakte van een cirkel wordt opgesteld, zodat leerlingen thuis wel de toepassingsopgaven kunnen maken. Hij geeft de stappen aan, kijkt daarvoor eerst gezamenlijk terug naar opgave 3, en stelt gesloten vragen. Verschillende leerlingen komen aan de beurt. De formule wordt stapje voor stapje opgebouwd. Uiteindelijk wordt de gevonden formule vergeleken met de bevindingen van E2: de oppervlakte ligt tussen de $2r^2$ en $4r^2$. Is dat met deze formule ook zo?	De leerlingen letten op en geven antwoord op vooral gesloten vragen van de docent. Verschillende leerlingen komen aan de beurt.

E6 Eindcompetenties consolideren 50:10 – 53:25	De docent loopt nog rond en biedt hulp/coacht.	Leerlingen werken in groepjes grotendeels zelfstandig aan het opgavenblad. Uit de analyse van de opgavenbladen blijkt dat leerlingen zichtbaar moeite hadden met opgaven 6 t/m 8. Ze halen delen van de formule voor de omtrek en de oppervlakte door elkaar, ze werken kwadraten weg door te delen door 2. Opgave 7 is misschien verwarrend, aangezien andere wiskundige inhoud erbij betrokken wordt, terwijl de zojuist opgedane kennis nog pril is.
---	--	---

6E-fase	Acties van de docent	Acties van de leerlingen
E1 Evalueren van de begincompetenties		
E2 Engageren		
E3 Exploreren		
E4 Empirische kennis toepassen		
E5a Zelfstandig expliciteren		
E5b Klassikaal expliciteren		
E6 Eindcompetenties consolideren		

Bijlage 6.2: Ingevulde observatieformulieren (de interactie tijdens centrale momenten)

Tijdens de vier 6E-lessen heeft een observant de letterlijke uitspraken van leerlingen tijdens centrale momenten opgeschreven (E1, E2 en E5b). De uitspraken van de docent zijn hieraan toegevoegd. Deze zijn vastgelegd via de video-opnamen en in 2 van de vier lessen ook via een geluidsopname.

De vragen die de docent heeft gesteld zijn zo ver mogelijk gecategoriseerd naar type vraag: weten dat, weten hoe, weten waarom. Daarmee kan iets worden gezegd over de mate waarin de docent de leerling aan het denken zet.

Les 1 Oppervlakte van een parallellogram

Datum: 22 maart 2016
Tijd: 13:45 – 14:35
Lokaal: 44

Tijd	Uitspraken docent Letterlijke uitspraken, vragen, antwoorden	Categorie Weten dat Weten hoe Weten waarom	Uitspraken leerling Letterlijke uitspraken, antwoorden, vragen
E1 03:57 t/m 07:15	Hoofdstuk 8 daar gaan deze lessen over. Dat gaat over oppervlakte. We komen ook omtrek tegen. Wat kan mij zeggen wat de omtrek eigenlijk is? Wat betekent dat begrip? Iemand daar nog iets aan toe te voegen? Ja, en over welk figuur hebben we het dan? Bijvoorbeeld 4 en 8, de 4 komt ook hier voor, de 8 hier, samen wordt dat 24. Dat was omtrek. Oppervlakte zonder naar dit figuur te kijken, wat is oppervlakte eigenlijk? En ik zou eens iemand anders willen dan M. Ja, van dit figuur bijvoorbeeld, maar wat is het breder gezegd? Wat is oppervlakte eigenlijk? Ja dat zou je kunnen zeggen. Dan heb je de oppervlakte van de onderkant. Ja dat zei K. ook al van een rechthoek bijvoorbeeld. Sst, luister alsjeblieft even naar elkaar. Er is niet 1 goed antwoord hé, ik wil	Weten waarom Weten hoe Weten waarom Weten waarom	Wat om het gebied heen zit zeg maar. Lengte x 2, breedte x 2 en dat optellen. Van een rechthoek. Lengte x breedte. Hoeveel er in kan. Van een vierkante doos de onderkant. Lengte x breedte. De ruimte die het vlak inneemt.

	weten wat er bij jullie opkomt. Nou de ruimte die het vlak inneemt. De grootte van een vlak bijvoorbeeld. De oppervlakte van een rechthoek ken je al, dat is in dit geval X? 4 keer 8 is 32. Wat je onder andere ook moet weten is: stel voor ik teken de diagonaal van deze rechthoek. Ik wil de lengte van de diagonaal hebben. Hoe reken ik die ook al weer uit? En dit is ook iets wat je straks terug komt in de opgaven. Oftewel? Hoe noem je dat? Welke zijde komt altijd onderaan? En wat is dat in dit figuur? Nou, de diagonaal weet ik niet, de andere weet ik wel, die zijn 4 en 8. En jij zegt die moeten we gaan kwadrateren. Wat moet ik vervolgens doen? Dan wordt BD wortel 80.	Weten dat Weten hoe Weten dat Weten hoe Weten hoe Weten hoe	32. A kwadraat plus B kwadraat is C kwadraat. De stelling van Pythagoras. De langste zijde. BD. Bij elkaar optellen en dan de wortel nemen.
E2 07:15 t/m 09:52	Het vierkant sla ik even over, daar weten we al van hoe we de oppervlakte moeten berekenen, net zoals de rechthoek. Nu gaan we deze les kijken naar een nieuw figuur wat je wel al kent. Het linker figuur is een? En de rechter figuur is? Ooit wel eens gezien? Heel goed. We gaan deze les kijken naar de oppervlakte van een parallellogram. Van de rechthoek weten we al, van het parallellogram nog niet. Als je naar deze twee figuren kijkt, ze zijn allebei gelegd met 6 lucifers. Wat zou je kunnen zeggen van de omtrek van beide figuren? De omtrek is gelijk. De randen dus bestaan allemaal uit 6 lucifers. Omtrek hebben we gehad. We hebben het ook over oppervlakte. Als je naar de twee figuren kijkt, wie denkt dat de oppervlakte van de rechthoek groter is dan die van de parallellogram? Steek eens je vinger op. Iets minder dan de helft. Wie denkt dat het rechter figuur groter is dan de linker figuur? (één leerling)	Weten dat Weten dat Weten waarom	Rechthoek. Parallellogram. De omtrek is gelijk.

	steekt vinger op) En de middengroep die weet het niet? Even groot zou ook nog kunnen. Hoe zou ik met 6 lucifers een parallellogram kunnen leggen waarvan ik op het zicht zeker weet dat hij kleiner is dan die van de rechthoek? Ja, deze hoek, wordt ie dan groter of kleiner? Ja. Als ik deze hoek kleiner maak, stel voor je doet dat heel ver door dan krijg je een lijn bijna. Dan is die oppervlakte dus? Kleiner. En de omtrek? Dit over het parallellogram. Aan het eind van de les kijken we nog even terug naar deze afbeelding en aan het einde van de les kun je de oppervlakte van het rechter figuur uitrekenen.	Weten waarom Weten waarom Weten waarom	Jawel, even groot. De hoek groter maken en de andere hoek kleiner. Kleiner. Kleiner. Hetzelfde.
E5b 41:30 t/m 46:30	Zorg ervoor dat je mij kan zien en het digibord kan zien. Ik wil graag met elkaar afronden. Ik wil van jullie horen wat je hebt gevonden in de opgaven. Ik heb van sommigen al gehoord dat ze het vrij lastig vonden. Ik wil toch kijken of we gezamenlijk tot een idee kunnen komen, zodat wel iedereen hier zo het lokaal uitgaat en begrijpt hoe het nou in elkaar steekt. Wat ik eerst wil weten van de groepjes die t/m opgave 5 zijn gekomen, is wat heb je daar opgeschreven? En steek je vinger even op. Ik begin hier vooraan. Bij opgave 5 voor wie daar nog niet was, werd de vraag gesteld: leg uit hoe je de oppervlakte van een parallellogram kunt berekenen. Wat hebben jullie daar opgeschreven F.? Kun je me meer vertellen over die basis en die hoogte? De hoogte staat loodrecht op de basis. Het groepje achterin. N. wat hebben jullie opgeschreven? Heel goed. Hoogte keer basis, basis keer hoogte. Je hebt het gewoon omgedraaid. C. ik vind het wel belangrijk dat je	Weten hoe Weten hoe Weten hoe	basis x hoogte. Hoogte staat loodrecht op de basis. hoogte x basis

stopt met de opgaven en nu even meekijkt. Dat geldt ook voor de rest. Heeft iemand hier nog iets aan toe te voegen? Iemand die zegt, ik had deze ingeving tijdens het maken van de opgaven? Of dit kwam in me op? Dan ga ik nog wat voorbeelden laten zien. Als je zegt basis keer hoogte hoor ik bij verschillende groepjes. De eerste parallellogram als ik daarvan AB als basis neem, dus deze zijde, wat is dan mijn hoogte? Hoe zou ik die kunnen aangeven? Kan ik hem binnen het parallellogram aangeven? Als ik dit als basis neem, dan zegt S. dan neem ik dit als hoogte. Waarom geldt nou dat van dat parallellogram de oppervlakte basis keer hoogte is? Waarom mag ik dat doen? En als het goed is heb je dat bij opgave 1 gezien. Ik kan dit stuk eraf snijden en dat kan ik hier eraan leggen, dan krijg ik een rechthoek. En waarom mag ik dan basis keer hoogte doen? De lengte van deze rechthoek is gelijk aan de basis van het parallellogram. En de hoogte van de rechthoek is gelijk aan de hoogte hier. Ik zie sommigen toch nog verder werken. Ik vind het heel belangrijk dat je meedoet. Nu heb je gezien bij opgave 3 dat de hoogte buiten het parallellogram viel. Wanneer valt de hoogte buiten het parallellogram? Wanneer geef je de hoogte buiten het parallellogram aan? Nu heb ik hier precies een voorbeeld waarbij ik als ik de hoogte naar beneden teken hij er net buiten valt. Dan geef ik de hoogte aan de buitenkant aan i.p.v. binnen het parallellogram.	Weten waarom Weten hoe Weten waarom Weten waarom Weten waarom	Ja. Aan het einde van die lijn AB een loodrechte lijn er bovenop zetten. (S) Je kan rechts of links een stukje eraf halen en dat kan je er bij de ander aanplakken. (S) Omdat het dan een rechthoek is, en dan lengte keer breedte. Als ie niet in het figuur past.
---	--	---

Les 2 Oppervlakte van een driehoek

Datum: 23 maart 2016
Tijd: 08:45 – 09:35
Lokaal: 22

Tijd	Uitspraken docent	Categorie	Uitspraken leerling
	Letterlijke uitspraken, vragen, antwoorden	Weten dat Weten hoe Weten waarom	Letterlijke uitspraken, antwoorden, vragen
E1 09:50 – 20:45	Jongens en meisjes. Het eerst wat je mag doen is het opgavenblad van gisteren erbij pakken. Daar laat ik nog wat dingen van zien. Ik laat zien hoe het had moeten. Volg dat. Ik wil niet dat je verbeteringen aan brengt op je opgavenblad. Let voor jezelf op en kijk of je het idee begrijpt. Van opdracht 6 en 7 laat ik straks een paar dingen zien. Zorg ervoor dat je dat aandachtig volgt. Maar ga dus niet op je opgavenblad verbeteren. Ben je hem vergeten, neem hem volgende week mee zonder thuis nog dingen aan te passen. Kort nog naar die afbeeldingen van gisteren. Toen vroeg ik welke van de twee groter was. De rechthoek of het parallellogram. Toen hadden we een stoere bink hier vooraan zitten die als enige zei 'ja, het parallellogram is groter'. Nu ben ik benieuwd of je met de kennis die je gisteren uit dat opgavenblad hebt opgedaan mij kan uitleggen en een redenering kan geven welke van de twee groter moet zijn. En daar geef ik je even een paar seconde de tijd voor om daarover na te denken. Welke moet nu groter zijn en hoe kun je dat verklaren? Ik ga eens naar K. Ja, je zou dit kunnen doorsnijden. Bedoel je dat? En dan hier aanleggen. Hebben we gisteren gezien dat je zo van een parallellogram een rechthoek kan maken. En wat zeg jij dan? Deze is één hoger. De hoogte is bij deze 5. $H = 5$. De hoogte bij dit parallellogram is 4. We hebben gisteren naar de begrippen basis en hoogte gekeken. Wat kun je zeggen	Weten waarom	Ik snapte heel opdracht 6 niet. Die linker is één hoger als je hem goed maakt die rechter. Als je dat rechter deel doorsnijdt en er links aan doet. Ja. Dat die ander één hoger is.

over de basis van de rechthoek en de basis van het parallellogram? X. Die zijn hetzelfde. Die bestaan allebei uit twee lucifers. Die zijn 10 lang. De basis van de rechthoek, dat noem je ook wel de lengte, die is 10. En hier de basis van dat parallellogram bestaat ook uit twee lucifers, dus die is ook 10. De oppervlakte van het parallellogram berekenden we met welke formule? Hoe rekende je dat ook al weer uit, de oppervlakte? Als we de basis en de hoogte hadden, wat deden we dan met die twee? Keer elkaar. Basis keer hoogte wordt hier 50 en basis keer hoogte wordt hier 40. Oftewel de rechthoek is groter dan het parallellogram. Dus degene die gisteren zeiden 'ik denk dat de rechthoek groter is, hebben helemaal gelijk. Ja ik vond het heel stoer van F. Ik moet hem toch teleurstellen. Volgende keer beter. Ik wil nu naar een paar voorbeelden kijken van opgave 6. Kijk mee, je schrijft dus niet mee. Dan laat ik zien hoe het had gemoeten. En opgave 7 kijk ik straks nog naar. Dit linker parallellogram, en die staat ook helemaal links bij opgave 6, daarbij zie je dat dit lijnstuk van 30 mm loodrecht staat op dit lijnstuk, AD, van 70 mm. Als ik AD als basis neem, dan basis = 70 mm, en we moeten het hebben is vierkante centimeter dus 7 cm. Als ik deze als basis neem, mijn hoogte staat daar altijd loodrecht op en die is nu gewoon 30 mm oftewel mijn hoogte is 3 cm. Dan is de oppervlakte basis keer hoogte is 7 keer 3 is 21 vierkante centimeter. Meer dan dit had niet gehoeven. Die hoogte valt gewoon binnen het parallellogram en die staat loodrecht op de basis. Nou als ik hem zou kantelen, en ik zou hem hier recht leggen, dan zal je zien dat dit 70 is, en dan komt mijn hoogte loodrecht te staan op mijn basis. Als mijn basis 70 is dan is mijn	Weten dat	Die zijn hetzelfde.
	Weten dat	Keer elkaar.
		Wacht even, wie zei dan gisteren dat het parallellogram groter was? F.
		Hoezo is de hoogte dan 30 mm, de hoogte is toch gewoon 70 mm?

	hoogte 30. Die hoogte valt soms binnen het parallellogram kan ik die aangeven, maar soms, zoals bij dit voorbeeld staat ie erbuiten, dan kan ik hem erbuiten aangeven. Kijk heel even mee. Ik kan hier als basis nemen VW. VW is 5 cm. Als hoogte, wat staat loodrecht op VW, loodrecht op VW staat XZ. XZ weet ik nog niet. Hoe kan ik daarachter komen? Door VY is 8,5. Het is een parallellogram dan is XW ook 8,5. Nu kan ik in deze driehoek met de stelling van Pythagoras deze hoogte uitrekenen. Hoe ging dat ook al weer? Met zijde en zijde kwadraat. De langste komt onderaan, die is 8,5. 8,5 in het kwadraat, wie kan dat snel voor mij uitrekenen? 72,25. Dan hebben we nog over 4 en vraagteken. 4 dat wordt 16. Om dit kloppend te maken, moet hier komen te staan 56,25. De andere kant op bij de stelling van Pythagoras namen we de wortel. De wortel uit 56,25 is 7,5 komt daar afgerond uit. De hoogte is 7,5. Wat je ziet is dat je een denkstap ertussen moest maken, de hoogte daar had je de stelling van Pythagoras voor nodig. Nu hebben ik als basis VW. Loodrecht staat daar op hoogte XZ, die is 7,5. En de oppervlakte is wederom basis maal hoogte is 5 maal 7,5 is 37,5 vierkante centimeter. Twee voorbeelden van opgave 6 waarbij bij de een de basis al is aangegeven in het parallellogram en bij de ander staat ie erbuiten aangegeven. Wat hebben ze gemeenschappelijk? Dat ze altijd loodrecht op elkaar staan. Opgave 7, bereken de oppervlakte van parallellogram ABCD hierboven. AB die kan ik als basis nemen. Die is 8. Wat staat er loodrecht op lijntje 8? Dat is lengte DF. DF kan ik dan als hoogte nemen. Die is 7,5. Die staat daar loodrecht op. Dan wordt de oppervlakte 8 keer 7,5 is 60. AB als basis en DF als hoogte, die staat daar loodrecht op, dat kan je hier aan dat loodrecht-teken zien. Nu willen ze bij de tweede vraag, en die is wat lastiger, bereken lengte CE. Kan me voorstellen dat je daar niet helemaal uitkwam. Wat zie je? CE staat	Weten dat	Ja. 72,25
--	---	------------------	-------------------------

	loodrecht op AD. Hoe lang is AD? 12. nu kan ik ook zeggen ik neem niet AB als basis, nee ik neem m'n andere zijde als basis, ik neem AD nu als basis. De basis is 12 zoals M zegt. Welke lijn staat loodrecht op AD en kan ik daardoor als hoogte nemen? Als ik AD als basis neem. Welke lijn staat loodrecht op AD? EC, die staat daar loodrecht op. Basis en hoogte staan loodrecht op elkaar. Die wil ik graag weten maar die weet ik niet. Oppervlakte van het parallellogram weet ik wel al. Die is 60. 60 is basis keer hoogte is 12 keer ... Hoe kan ik nu CE uitrekenen? Heel goed. $60 : 12$ is 5. Op die manier had je dus door eerst AB als basis te nemen en DF als hoogte, bereken je daarmee de oppervlakte van het parallellogram. Om nu CE uit te rekenen, neem je deze zijde als basis en deze zijde als hoogte. Je neemt dus een andere zijde als basis met een andere hoogte, maar de oppervlakte moet gelijk zijn, want we hebben het over hetzelfde figuur. Dit over les 1.	Weten dat Weten dat Weten dat	Oh nee, laat maar. Oh nee, 12. EC. $60 : 12$. Alle lijnen zijn niet even recht, of niet even lang.
E2 21:00 – 22:20	Wat ik eerst wil doen, is kijken waar we het vandaag over gaan hebben, en dat is driehoeken. Ik heb hier drie gekleurde driehoeken op het whiteboard staan. Kijk eens naar die driehoeken. Dan is mijn eerste vraag: wat valt je op aan die driehoeken? Valt je iets op, behalve dat ze niet dezelfde kleur hebben? Oke, dus er zit geen gelijkzijdige driehoek tussen. Als ik nu vraag aan jullie welke van de drie is het grootst qua oppervlakte. Wie denkt dat de blauwe driehoek de grootste oppervlakte heeft? Dat zijn er 7 of 8. Wie denkt dat de rode de grootste oppervlakte heeft? Weer ongeveer 8. Wie denkt dat de gele het grootst is? Eén. Nou we zijn dus verdeeld. Aan het einde van de les wil ik nog met z'n alle terugkijken naar die drie driehoeken en dan kun jij aangeven welke van die drie het grootst is.		Alle lijnen zijn niet even recht. Uh...niet even lang.
E5b 49:05 –	Jongens en meisjes, kijk mee naar het bord net als gister. Zorg ervoor dat je het bord kan zien. Als S. ook		

54:50	zit, wil nu van jullie horen, zonder dat je doorschrijft, want ik vind het heel storend als je de opgaven nu nog afmaakt, dit is ook belangrijk voor jezelf, want gezamenlijk gaan we kijken wat we nou hebben gezien in het opgavenblad. Nu wil ik van jullie horen wat je in het opgavenblad hebt gezien over de oppervlakte van een driehoek, wat heb je opgeschreven bij opgave 5? Leg uit hoe je de oppervlakte van een driehoek kunt berekenen. S. Breedte x hoogte : 2. Ik hoor al een groepje dat daar een aanvulling op heeft. E. Basis x hoogte : 2, of b maal h gedeeld door 2. Waarom zeggen jullie dat het basis maal hoogte gedeeld door 2 is, zou een ander groepje daar iets over kunnen zeggen? Wie zou dat kunnen uitleggen waarom zij dat denken? Een driehoek is de helft van een vierkant of rechthoek. Is dat bijvoorbeeld bij deze gele, is dat ook zo? Is dit de helft van een vierkant of een rechthoek? Waarvan is dit de helft? Dit is de helft van een... Hoe bereken ik ook al weer de oppervlakte van een parallellogram? Oppervlakte parallellogram is basis keer hoogte en nu zegt M de oppervlakte van een driehoek is heel vaak de helft van een vierkant of een rechthoek of een parallellogram. Van iedere driehoek kun je een parallellogram maken als je er twee van hebt. Dan is de oppervlakte van een driehoek zoals jullie zeggen basis keer hoogte gedeeld door twee. Wat kun je zeggen over de basis en de hoogte? Bij opgave 7 heb je twee driehoeken. Raymond en Simone nemen daar een verschillende basis met een	Weten hoe. Weten hoe Weten waarom Weten waarom Weten dat Weten dat	Breedte x hoogte x 2 E: Basis x hoogte : 2 S: Oh ja, dat bedoel ik. Ik had een b, maar ik dacht van breedte. Omdat een driehoek is meestal de helft van een vierkant of rechthoek. Dus dan deel je door 2. Nee. Helft van een parallellogram. Basis keer hoogte. De hoogte moet precies loodrecht staan op de basis.
-------	--	--	---

bijbehorende hoogte. Het hoeft dus niet zo te zijn dat in jouw driehoek maar 1 basis is. Het ligt er maar aan welke zijde je als basis kiest. Daar heb je een keuze in. Dan wil ik nog even kijken naar de drie driehoeken. Ik geef een kleine hint, ik leg ze op elkaar, en dan wil ik van jullie horen welk idee je krijgt over de oppervlakte van de driehoeken, welke is het grootst? Of kun je er iets anders over zeggen? Kijk er eens even naar. Wat valt je op? Ik geef je even wat bedenktijd. Klopt. Dat is een stomphoekige driehoek, die valt er het meest buiten. Wat valt je nog meer op K.? Ja, deze kant op. Dus hier hebben we nog een stompe hoek, hier een rechte en hier een scherpe. Klopt ook. Wat valt je nog meer op? Als je hieronder kijkt, wat kan ik zeggen over het onderste stuk? En waarom is dat zo? Boven komen ze tot dezelfde hoogte vanaf hier. En wat nog meer? Als ik dit als basis neem, dan zijn die bij alle drie gelijk, ze overlappen elkaar precies. De hoogte is ook gelijk. Zegt S als de basis en de hoogte gelijk zijn, dan... Dan is de oppervlakte dus ook gelijk. Dus de oppervlakten van die drie driehoeken zijn alle drie allemaal gelijk.	Weten dat/ weten waarom Weten waarom Weten waarom Weten dat	Geel steekt het meeste uit. De hoek wordt steeds kleiner. De hoogte en basis zijn even groot. Ze komen boven allemaal tot hetzelfde... De basis is even lang. Dan zijn ze even groot allemaal.
--	---	--

Les 3 Omtrek van een cirkel

Datum: 30 maart 2016
Tijd: 08:45 – 09:35
Lokaal: 22

Tijd	Uitspraken docent	Categorie	Uitspraken leerling
	Letterlijke uitspraken, vragen, antwoorden	Weten dat Weten hoe Weten waarom	Letterlijke uitspraken, antwoorden, vragen
E6 (vorige les) 06:20 - 15:50	<i>Het huiswerk van de vorige les wordt besproken. Dit geldt niet als voorkennis voor deze les. Het valt onder het evalueren van de leerwinst van die les. Dit gebeurt weinig interactief, dus van aantonen van de leerwinst door leerlingen is minder sprake.</i> Zoals ik net al zei hebben we de tijd vandaag weer hard nodig. Dus wat je direct mag doen, is het tweede opgavenblad erbij pakken, van de vorige les. Ik ga weer van twee belangrijke opgaven van het huiswerk laten zien hoe het had gemoeten. Kijk daar goed naar. Daarna maak ik een stapje naar de les van vandaag. We hebben al twee lessen gehad dat we in drietallen met zo'n boekje hebben gewerkt. In de eerste lessen hebben we het gehad over? Wie weet dat nog? Hoe konden we ook al weer de oppervlakte van een parallellogram berekenen? Met welke formule? Basis keer hoogte. En de les daarna hebben we gekeken naar de oppervlakte van een driehoek. Hoe konden we daar ook al weer de oppervlakte van berekenen K.? Heel goed. Ik wil nu opgave 7 mondeling met jullie checken. Kijk mee op je opgavenblad. Je ziet dat Raymond en Simone bij eenzelfde driehoek een andere basis en een bijbehorende hoogte nemen. Nu is de eerste vraag: één van de twee heeft genoeg informatie om de hoogte bij de basis uit te rekenen. Wie had een idee welk van de twee genoeg informatie had om de basis uit te rekenen? De linker, Raymond. Waarom had		Parallellogrammen Basis keer hoogte. Basis keer hoogte delen door 2. De linker.

Raymond genoeg informatie?	Weten hoe	Omdat RS is de helft van RQ.
Waarom is RS de helft van RQ? Waarom is punt S de helft op zijde RQ?	Weten dat	Omdat PR en PQ allebei hetzelfde zijn.
Dus wat voor een driehoek heb ik dan? Weet je nog hoe dat heet?	Weten dat	Nee.
Weet iemand nog hoe dat heet als er twee gelijk zijn?	Weten dat	M: Een gelijkhoekige? A: Een gelijkbenige!
En wie weet hoe het heet als ze alle drie gelijk zijn?	Weten dat	Gelijkzijdig.
Gelijkzijdig ja. Dus dit is een gelijkbenige driehoek. En bij Raymond zie je dat PS op de helft van RQ komt te liggen. Dus RS is 12. En dan zou je PS uit kunnen rekenen. Waarmee zou je PS vervolgens uit kunnen rekenen? Wie heeft een idee, wat kun je daarvoor gebruiken?	Weten dat	De stelling van Pythagoras.
De stelling van Pythagoras. Dan heb je een rechthoekige driehoek waarin je alles weet en dan kun je PS uitrekenen. Dat over opgave 7. Daar ga ik verder nu niks over zeggen.		
Opgave 8 laat ik zien. Twee vliegers en bereken de oppervlakte. Daarvoor heb je nodig dat die vliegers bestaan uit allemaal driehoeken. De oppervlakte van een driehoek bereken je met basis keer hoogte gedeeld door 2. Ik kan ze nummeren. Welk van die vier zijn gelijk aan elkaar? Welke is gelijk aan nummer 1?	Weten dat	Nummer 4.
1 en 4 zijn gelijk aan elkaar. Om nu de oppervlakte van nummer 1 en 4 uit te rekenen: van nummer 1 kan ik als basis nemen 30 cm, we willen de oppervlakte in vierkante decimeter, dus 3 dm. De hoogte bij deze basis is die 80 cm, die staat daar loodrecht op. 3 dm keer 8 dm, basis keer hoogte, vervolgens delen door 2, maar ook keer 2 want 1 en 4 zijn even groot, ik heb hem twee keer. Delen door 2 en keer twee heft elkaar op, dus 24 decimeter. Nummer 2 en 3 wat kan ik daarvan zeggen?	Weten dat	Die zijn even groot.
Die zijn ook even groot. Als basis neem ik deze lange zijde in het		

midden, die is 11 dm, dan wordt mijn hoogte dit stukje, dat is de helft van 50 cm, dus 2,5 dm. Basis maal hoogte gedeeld door 2 en we hebben hem twee keer dus keer 2 en dan kom ik op 37,5 vierkante decimeter. Opgeteld wordt dat samen, help me als ik het verkeerd zeg, 61,5 vierkante decimeter. O ja, helemaal goed, dankjewel. Ga alsjeblieft geen verbeteringen brengen op dat opgavenblad, dat heb ik de vorige keer ook gezegd, want nu kan ik zien wie er wel is uitgekomen en wat er precies beter kan. Die tweede daar ga ik wat sneller doorheen. Die middelste twee zijn gelijk aan elkaar, die daarna ook, en de buitenste twee zijn ook gelijk aan elkaar qua oppervlakte. Die middelste: als basis kan ik nemen 60 plus 30 is 9 dm. Laat ik het toch maar even uitschrijven. Ik ga ze nummeren 1 t/m 6. 1 en 6 zijn gelijk aan elkaar, die eerste, nee ik merk dat ik een beetje aan het klungelen ben. Laat ik beginnen met 3 en 4. Als basis kan ik nemen die 60 plus 30 is 90 cm is 9 dm. En als hoogte 20 cm is 2 dm. Wordt gedeeld door 2 keer 2 weer, wordt 18 vierkante decimeter. Ik zie je vraag X, maar... Dat Pasen heeft mij ook niet veel best gedaan. Ik ben niet helemaal scherp, goed dat je het zegt jongen. 2 en 5, dan kan ik als basis nemen stukje 10 cm en die hoogte 60, dus 1 dm keer 6 dm, vervolgens gedeeld door 2 keer 2 wordt 6 vierkante decimeter. Die nummer 1 en 6 zijn wat lastiger. Die had je moeten opsplitsen in twee stukken. Dit onderste stuk als basis 20 cm is 2 dm en hoogte 30 cm is 3 dm, die staan loodrecht op elkaar. Dat wordt 6 vierkante decimeter. Nu heb ik alleen nog dit stuk 2 keer. Daarvan wordt de basis 20 cm en de hoogte 60 cm dus dat wordt keer elkaar 12 vierkante decimeter. Als je dat allemaal bij elkaar optelt kom je uit op 40 vierkante decimeter. Je had die driehoeken dus apart moeten uitrekenen en opzoek moeten gaan naar de basis en de hoogte van de		Het is 27,5. Ja, het is niet 9 decimeter, maar 8 want het zit niet helemaal onderaan.
--	--	---

	verschillende driehoeken. Dat over de vorige les.		
E2 15:50 – 21:00	Deze les gaan we het niet meer hebben over oppervlakte, maar eerst over omtrek, en wel de omtrek van een cirkel. Daarvoor heb ik hier een afbeelding staan van een cirkel met daarin 6 driehoeken. Die cirkel heeft een straal van 10 cm. Kijk eens naar de afbeelding en vertel me wat je opvalt of iets wat je zou kunnen weten. M. Valt iemand nog wat op? Zou je hier iets over kunnen zeggen? Misschien dat je van een bepaald stuk weet hoe lang dat is? (3 seconde stilte). Als bijvoorbeeld dit, de straal hier van dit punt naar daar, 10 cm is, hoe lang is dan van dit punt naar hier? Ook 10 cm. En van dit stuk naar hier? Ook hé. Die stukken zijn allemaal 10 cm. Verder weet ik dat die 6 driehoeken bij elkaar, hoeveel graden is dat? Die hele cirkel, J? 360 graden. Nu heb ik hier 6 hoeken zitten die samen 360 graden zijn, Hoeveel graden is 1 zo'n hoek dan? Ik help een beetje op weg ergens naar toe. 1 zo'n hoek is 60 graden. De drie hoeken van een driehoek zijn hoeveel graden? Hoeveel graden houd ik dan over voor die twee hoeken aan deze kant? Je zet al meteen een volgende denkstap. Allebei 60 graden. Ik heb voor die twee 120 graden over. Die hoeken zijn even groot, waarom moeten die hoeken even groot zijn? Waarom weet je dat ze even groot zijn? We hebben hier gezien deze is 10 cm en deze is 10 cm, hoe noemen we zo'n driehoek dan? Dat is aan het begin van de les ook verteld. Ja, maar als ik pas weet dat er 2 gelijk aan elkaar zijn? Van een gelijkbenige driehoek wisten we dat de basishoeken, dat zijn deze	Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat	M: Ja daar zit zo'n vorm in, en er zitten allemaal driehoekjes in. 10 cm. M: ook 10 cm. J: 360 graden. 60 graden. 180. Allebei 60. Omdat 3 keer 60 is 180. Gelijkzijdig. Gelijkbenige.

	twee hier, die zijn gelijk aan elkaar. Nu zien we dat de drie hoeken allemaal 60 graden zijn. Wat voor een driehoek heb ik dan? Dan heb ik geen gelijkbenige driehoek maar een? Hoe lang zou dit stuk dan zijn, als dit een gelijkzijdige driehoek is? Ook 10 cm. Ok. Nu ga ik hem even op pauze zetten. Heel veel stappen gezet. Ik weet dat zo'n driehoek een gelijkzijdige driehoek is met dit 10 cm. Nu de omtrek van die cirkel, de buitenste rand, zou die heel veel verschillen van de buitenste rand van die zeshoek? Verschilt dat heel veel? Valt wel mee he. Dus dat zou een redelijke benadering kunnen zijn voor de omtrek van die cirkel. De omtrek van die zeshoek is die groter of kleiner dan de omtrek van die cirkel? De omtrek van die cirkel is natuurlijk groter dan de omtrek van die 6 rechte lijnstukjes. Hoe groot zijn die zes rechte lijnstukjes bij elkaar? Dus de omtrek van de zeshoek is 60 cm. De omtrek van de cirkel met straal 10 is groter dan 60 cm. Deze les gaan we daar preciezer een berekening voor vinden, hoe je de omtrek van een cirkel exact kunt berekenen. Daar ga je zo in de drietallen mee aan de slag. Je krijgt zo een rond voorwerp, een stukje touw, en een meetlint, en daarna gaan we uitwisselen wat je bij opgave 1 op je opgavenblad hebt gevonden.	Weten dat Weten dat Weten dat Weten waarom Weten dat	Gelijkzijdige driehoek. 10 cm. Nee. Kleiner. 60 cm.
E1 21:00 – 21:35	Voordat we dat gaan doen wil ik eerst nog vragen: ik heb hier bijgezet dat de straal 10 cm is, hoe groot is mijn diameter dan als de straal 10 cm is? Oftewel de diameter is? Als je de diameter en de straal allebei hebt... Straal keer twee, dan heb ik de diameter. Als ik de diameter weet, en ik wil de straal hebben, wat doe ik dan? Delen door twee. Dat wilde ik nog even benoemd hebben.	Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat	20 cm. Doormidden gesneden. Maal twee, straal maal twee. Delen door twee.

E3 34:40 – 35:45	Als je dit zo ziet, en dit hebt overgeschreven, heeft iemand dan al een idee? Wat valt je op aan de tabel? De factor zit steeds om en naar bij de 3. Hoe zou het dan kunnen dat we niet precies dezelfde factor hebben? Je hebt altijd een meetfout. We hebben een touwtje om een voorwerp gedaan. Zou het dan snel wat langer zijn dan de omtrek van dat voorwerp of iets te kort, als je een touwtje erom heen legt? Dat touw is wat dikker, die leg je eromheen, waardoor de omtrek net iets hoger uitvalt dan dat ie is. Maar het gaat om het idee. We hebben nu die tabel, daarmee kun je de rest van de opgaven maken. Aan het einde van de les wil ik nog het een en ander uitwisselen net als in de vorige lessen.	Weten waarom Weten hoe Weten hoe	Ze zitten allemaal bij de 3. Niet goed gemeten. Langer.
E5b 46:00 – 51:40	Dames en heren, ik wil dat je je pen neerlegt en meekijkt naar het bord. Ik wil wederom van jullie horen wat je bij bepaalde opdrachten hebt opgeschreven, zodat we gezamenlijk tot een idee komen. Heb je ergens iets op aan te vullen, steek dan je vinger op. Voordat ik begin, wacht ik tot iedereen z'n pen heeft neergelegd. We hebben net gezien dat de gemiddelde factor 3,4 of 3,5 was. Volgens mij was het 3,445 van de hele klas. Nu wil ik graag horen wat je in je groepje hebt opgeschreven bij opgave 5. Daar werd gevraagd 'wat kunnen jullie zeggen over de diameter en de omtrek en een cirkel?' en daar kon je een toelichting bij geven. K. Ja dat klopt. Als je daar de letters voor gebruikt, die ook in het boek worden gebruikt dan doe je: $d = 2 \times r = 2r$, dus diameter is twee keer de straal. Wat heeft een ander groepje opgeschreven over de diameter en de omtrek, over die twee van een cirkel? Laat ik het aan dit voorste groepje vragen. Wat hebben jullie opgeschreven? Lees eens voor.	Weten waarom Weten waarom	K: De diameter is twee keer de straal. De diameter is ongeveer drie keer zo klein als de omtrek.

	Oftewel de omtrek is... Of de omtrek is drie keer zo groot als de diameter. Had je het idee dat dat voor alle cirkels zo is? Dat groepje daar, wat hadden jullie opgeschreven bij opgave 5? Keer factor ja. Omtrek is diameter keer factor. Dan zijn we al toe aan het werken naar een formule. En B. zegt net die factor is ongeveer... 3. De omtrek van een cirkel is de diameter maal een bepaalde factor, en bij die factor kwamen we met de klas gemiddeld uit op 3,445. M? Dat is π ja. Sommigen hebben daar misschien al van gehoord. Ga ik nu iets introduceren. Voor iedere cirkel geldt, en dat ga je bij opgave 6 ook zien, omtrek is diameter keer factor. En die factor noemen we inderdaad π. Hoe vind je die op je rekenmachine: druk op shift linksboven, vervolgens op exp. Druk dan op =. Het getal wat eruit komt is oneindig: 3,14159265359897932384 62643383279502884971... Dat waren de eerste 40. Je hebt van die wedstrijden op tv. Sommige kunnen er wel 1000 achter elkaar opnoemen. En ik dacht als wiskundeleraar moet ik er wel minimaal 40 kennen. Gaan we even naar de andere wiskundeleraar... twee, 3,14. Dus daarmee heb ik π geïntroduceerd. Dat heb je ook nodig voor opgave 6. Wat we nu gezamenlijk hebben gezien, is dat als je de diameter met een factor vermenigvuldigd krijg je de omtrek, en die factor is π. Waar je rekening mee moet houden is als de straal is gegeven dat je eerst naar de diameter gaat door te vermenigvuldigen met twee. Je krijgt 5 minuten om zo ver mogelijk de huiswerkopdrachten af te krijgen. Wat niet afkomt, krijg je mee als huiswerk voor thuis.	Weten waarom Weten waarom Weten hoe	Drie keer zo groot Ja ongeveer. Bij diameter twee keer straal. En bij omtrek diameter keer factor. 3 Is π.
--	---	--	--

Les 4 Oppervlakte van een cirkel

Datum: 4 april 2016
Tijd: 12:55 – 13:45
Lokaal: 43

Tijd	Uitspraken docent Letterlijke uitspraken, vragen, antwoorden	Categorie Weten dat Weten hoe Weten waarom	Uitspraken leerling Letterlijke uitspraken, antwoorden, vragen
E1 05:10 – 10:30	We hebben vandaag de laatste les dat we aan de opgavenbladen gaan werken. Ik ga eerst iets vertellen over de vorige les. Het is handig als je het opgavenblad voor je pakt, zodat je mee kan kijken. Ik wil niet dat je verbeteringen aanbrengt, ik wil wel dat je meekijkt. B? Ik heb geen tijd om ze allemaal te bespreken. Vandaag gaan we kijken naar opgave 8. Eerst ga ik iets vertellen over de vorige les. Toen ben ik begonnen met deze afbeelding, en we zagen dat als de straal 10 cm is, de diameter is dan 20 cm, en we zagen dat dit stuk hier gelijk was aan de straal, dat was 10 cm. Oftewel die omtrek van die cirkel was ongeveer 6 van die stukken lang, dus ongeveer 60 cm, iets meer. Dus als de diameter 20 cm was, dan omtrek 60 cm. Deze stukken waren allemaal even groot als de straal, het waren gelijkzijdige driehoeken. Ik heb 6 van die stukken, 6 x 10 cm is 60 cm. Dat betekent dat ik de diameter met het getal 3 heb vermenigvuldigd en dan krijg ik de omtrek. Toen heb ik jullie aan de slag gezet met dat touwtje en met een rond voorwerp en toen zagen we dat gemiddeld in de klas je die diameter niet met 3 moest vermenigvuldigen, eerst hadden we factor 3, daarna hadden we toen we met het touwtje aan de slag gingen factor die bleek 3,445 te zijn, dat idee kregen we, en toen heb ik iets verteld over π, toen zagen we dat die factor gelijk is aan π wat afgerond ongeveer 3,14 is. We zagen die les dat we de omtrek van een cirkel kunnen berekenen door diameter maal π te doen. Nu heb je bij opgave 8 dat nodig, en voor de les van vandaag heb je dat ook een stukje nodig. Bij opgave 8 staat de oude fiets hiernaast heeft een voorwiel met een straal van 80		B: Ik snapte die laatste opgaven niet.

	cm. Nu is de eerste vraag hoeveel cm is de afstand die het voorwiel aflegt als het voorwiel één keer ronddraait? Als dat voorwiel een rondje draait dan betekent dat dat ik precies de omtrek van die cirkel, dat je die afstand hebt afgelegd. De vraag is dus eigenlijk bereken de omtrek van een cirkel met een straal van 80 cm. Om de omtrek te berekenen hadden we de diameter nodig, de diameter is dan het dubbele 160 cm, vermenigvuldigen we dat met π dan komt daar afgerond op hele cm 503 cm uit. Ik wil niet dat je verbeteringen aanbrengt op je blad W. Ja? Bij vraag 2 staat Nick fietst met deze fiets in 20 minuten met een snelheid van 18 km per uur naar zijn oma. Hoe vaak draait het voorwiel rond? Nou als je 20 minuten lang 18 km per uur fietst dan leg je $18 : 3 = 6$ km af. Waarom deel ik door 3? Omdat 20 minuten drie keer in een uur past. Dus iedere 20 minuten leg je 6 km af, dat is 3×20 minuten bij elkaar opgeteld 18 km per uur. Dus hij legt 6 km af dat is omgerekend 600.000 cm. Als hij 1 rondje draait, dan legt hij 503 cm af. Hoe vaak draait het voorwiel dan rond bij 600.000 cm? Dan deel ik 600.000 door de omtrek 503, komt daar 1193 keer dat dat voorwiel ronddraait uit. Bij de laatste vraag: het achterwiel draait tijdens dezelfde rit waarbij je 600.000 cm aflegt 3200 keer rond. Hoeveel cm is de straal van het achterwiel? 600.000 is de afstand die je aflegt, daar doe je 3200 rondjes over. Dan leg je per 1 rondje, per omtrek van het achterwiel, leg je 187,5 cm af. Dus de totale afstand, 6 km, 600.000 cm, gedeeld door 3200 rondjes. Dan is de omtrek van het achterwiel 187,5 cm. 187,5 cm, de omtrek, is dan diameter maal π. Om nu de diameter te berekenen, deel ik die 187,5 door π. Dan heb ik de diameter, dat is 60 cm. Ze vroegen om de straal. Dan had je die 60 cm nog moeten delen door 2, is 30 cm. Dit was de uitwerking van opdracht 8. Ik denk dat dit de lastigste opdracht was van het opgavenblad, daarom heb ik die laten zien.		
E2 10:30 – 14:30	Nu gaan we verder met de les van vandaag. Je hebt die omtrek van de cirkel weer nodig, die komt voor een deel terug. We gaan het namelijk		

hebben over de oppervlakte van een cirkel. Ik heb hier twee keer dezelfde cirkel afgebeeld. Die cirkel heeft een bepaalde straal, van het middelpunt tot daar. De letter die we daaraan geven, dat is de R. In die linker cirkel past precies een vierkant in die cirkel. Van welke is de oppervlakte groter, van het vierkant of van de cirkel, B.? Die cirkel hé, want ik heb hier nog stukken erbuiten liggen, dus de oppervlakte van die cirkel is groter. Kun je iets zeggen over de oppervlakte van dat vierkant? De oppervlakte van dat vierkant bestaat uit 4 driehoeken. Deze driehoek, deze zijde die is even lang als de straal, die is R. Hoe lang is deze zijde? K.? Ook R. Kun je dan iets zeggen over de oppervlakte van die driehoek? N.? Heel goed. R in het kwadraat, die staan loodrecht op elkaar, basis x hoogte, R in het kwadraat gedeeld door 2, oftewel een half R kwadraat, een half of gedeeld door 2 is natuurlijk hetzelfde. Dus 1 zo'n driehoek is een half R kwadraat, hoeveel van die driehoeken heb ik? M.? 4, dus ik doe het keer 4, en dan komt eruit 2 R in het kwadraat. De oppervlakte van het vierkant is 2 R in het kwadraat. Die van de cirkel moet dus sowieso groter zijn. Gaan we rechts kijken. Zie ik daar een vierkant, die past precies om de cirkel. Hier past ie erin, hier past ie eromheen. Welke oppervlakte is nu groter, die van de cirkel of van het vierkant? X.? Van het vierkant hé. Dat vierkant bestaat weer uit 4 kleinere vierkantjes. Kun je iets zeggen over de oppervlakte van één zo'n klein vierkant? Hoe groot is dit stuk? Hoe groot is dit stuk? Ook R. Hoe groot is één zo'n vierkantje dan? Hoe groot is dat hele vierkant dan? Heel goed. 4 R in het kwadraat. We hebben aan deze kant 2 R kwadraat	Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat	B: De cirkel. K: ook R. Die is R in het kwadraat gedeeld door 2. 4. X: Van het vierkant. X: dat is R. X: Ook R. X: R in het kwadraat. X: 4 R in het kwadraat
---	---	---

	en deze kant 4 R kwadraat. Wat kun je nu zeggen over de oppervlakte van de cirkel? K? Die ligt ertussenin. Wat is een schatting van jou, als ie tussen de 2 R in het kwadraat en de 4 R in het kwadraat ligt? 3 R in het kwadraat, dat is een eerste schatting. B? Om het makkelijk te maken, kun je ook zien dat ik deze driehoek hier dat ik die aan deze kant er tegenaan leg. Dan krijg ik een vierkant, net zoals hier, met R bij R... Ja ik probeer het nu...Ik laat even zien hoe het makkelijker kan. Als ik deze hier aan die kant eraan leg, en dit stuk hier leg ik aan deze kant eraan, dan krijg ik twee vierkanten van ieder R in het kwadraat. Dat is 2 R in het kwadraat. Wat ik nu heb geprobeerd bij jullie los te maken: okay die oppervlakte van die cirkel die ligt tussen de 2 R kwadraat en 4 R kwadraat, en dan zegt K. dat zal ongeveer 3 R kwadraat zijn.	Weten dat Weten waarom	K: die ligt ertussenin. K: 3 R in het kwadraat. B: maar waarom is dat 2 R in het kwadraat? B: je moet toch die half keer vier...
E5 43:20 – 50:10	Dames en heren, ik wil dat iedereen mij kan zien en het digibord kan zien. En dat je je pennen neerlegt, zodat je mee kan doen. Ik wil met ze alle uitwisselen wat we gezien hebben. In het ene groepje ging dat wat beter dan in het andere groepje. Ik had graag gezien dat iedereen nu bij opgave 5 was, dat is niet iedereen gelukt. Toch ga ik alvast zeggen dat bij opgave 5 staat: leg uit hoe je de oppervlakte van een cirkel kunt berekenen. Schrijf jullie bevindingen hieronder op. Probeer samen tot een formule te komen waarin je alleen de variabele 'straal' gebruikt." Dan wil ik eerst terugkijken naar opgave 3, daar moest je iets zeggen over de hoogte van de rechthoek die je steeds hebt getekend. Wat hebben jullie gezegd over de hoogte van die rechthoek, L? Waar was die steeds gelijk aan? Aan de straal, en die was 2,5. De	Weten waarom	L: aan de straal.

	hoogte is gelijk aan de straal. Nu ben ik bij iedereen langs geweest om te sturen waar de breedte gelijk aan is. Die breedte die was gelijk aan, B.? Dus de helft van de omtrek, hé. De hoogte van de rechthoek is de straal. En B. zegt de breedte is gelijk aan de helft van de omtrek. Hoe kan ik nu de oppervlakte van deze rechthoek berekenen? Hoe bereken je de oppervlakte van een rechthoek ook alweer? K.? En wat doe je dan eigenlijk? Voor een rechthoek, wat doe je normaal gesproken voor de oppervlakte van iedere rechthoek? Normaal heb je opp. rechthoek = lengte keer breedte. En nu is dat straal keer de helft van de omtrek. Nu staat hier oppervlakte is straal keer de helft van de omtrek. Nu willen we ervoor zorgen dat we alleen nog maar de variabele, dat wat verschillend kan zijn: de ene cirkel heeft een straal van 4 de ander van 5 de ander van 3, nu willen we nog dat we alleen de variabele straal in de formule hebben staan. Hoe kun je daarvoor zorgen? Wat moet ik daarvoor vervangen? Wat moet daarvoor weg? Welk woordje moet weg? Het woordje omtrek moeten we weg zien te krijgen. Want nu heb ik nog twee variabele, ik heb nog de straal en ik heb nog de omtrek. Hoe berekenen we de omtrek ook al weer? Omtrek is diameter keer π. Ik schrijf het even uit. Dat is dit stukje. Dus oppervlakte is straal keer de helft van diameter keer π. Hoe kan ik er nu voor zorgen in deze formule dat ik alleen nog maar het woordje straal overhoud? Kijk eens goed wat er staat. Heeft iemand een idee? Wat kan ik vervangen voor straal? Er staat het woordje diameter. Diameter is gelijk aan hoe vaak de straal? M? Diameter, dit stukje van de formule, is gelijk aan twee keer de straal. Nu staat er dat ik een half keer de diameter keer π moet doen, wat zal	Weten waarom Weten dat Weten dat Weten waarom Weten dat Weten dat	B: de breedte was gelijk aan de omtrek van de cirkel delen door 2. K: straal keer de helft van de omtrek. K: lengte keer breedte. Omtrek. Diameter keer π. M: twee keer.
--	---	---	---

	dan worden een half keer de diameter? Waardoor kan ik dat vervangen? Wat is de helft van de diameter? De straal. Een half maal diameter kan ik vervangen voor straal. Ik krijg de oppervlakte van een cirkel is gelijk aan straal keer straal, een halve diameter vervangen we voor de straal, keer π. Welke letter gebruiken we ook al weer voor de straal, F? De R. Welke formule krijg ik dan verkort voor de oppervlakte van een cirkel? M? De oppervlakte van een cirkel kan ik dus uitrekenen met de formule R in het kwadraat keer π. Wat zagen we in het begin van de les, dat de oppervlakte van de cirkel moest liggen tussen 2 keer R kwadraat en tussen 4 keer R kwadraat. Toen zei K, nou dan denk ik ongeveer 3 keer R kwadraat. Is dat nu ook zo? Hebben wij nu een formule die ongeveer ligt bij 3 keer R kwadraat? Hoe vaak keer R kwadraat staat hier? 3,141592... etc. keer R kwadraat. Met dit opgavenblad heb ik gehoopt dat je zelf achter de formule kwam. Ik weet dat het een vrij lastige opgave was. Als dat niet is gelukt, dan hoop ik wel dat je nu je de formule weet de rest van de opgaven kunt maken. Daar krijg je nu de laatste paar minuten de tijd voor om zover mogelijk te komen. Morgen gaan we er een paar opgaven van bespreken.	Weten dat Weten dat Weten dat Weten dat	De straal. F: Uhm...weet ik niet. L: R. M: R kwadraat keer π. 3,14.
--	--	---	--

Bijlage 6.3: Inge vulde analyseschema's van de opgavenbladen

Per les is van 6 leerlingen het ingevulde werk bekeken: twee zwakke leerlingen, twee leerlingen uit de 'middengroep' en twee sterke leerlingen. Deze leerlingen zaten niet bij elkaar in het groepje. Er is gekeken naar of de opgave (grotendeels) goed (G), fout (F), of niet gemaakt (NG) is en opvallendheden zijn meegenomen. Bij het analyseren van de opgavenbladen heeft de focus gelegen op het verwoorden van het geleerde door de leerlingen (fase E5a). Daarom zijn van de lessen waarin de leerlingen de opgaven van fase E5a vóór de klassikale uitwisseling hebben gemaakt die opgaven van de hele klas geanalyseerd. Bij de eerste en laatste les is dit niet gebeurd. Bij het doornemen van die opgavenbladen bleek dat de leerlingen de klassikale bespreking of delen daarvan over hadden genomen.

Niet alle opgavenbladen zijn ingeleverd. Sommige leerlingen zijn één of een aantal bladen kwijtgeraakt.

Les 1 Oppervlakte van een parallellogram

Datum: 22 maart 2016
Tijd: 13:45 – 14:35
Lokaal: 44

Opgave	6E-fase	Verwacht resultaat	Aantal	G	F	NG	Opmerkingen over uitwerkingen (bijv. opvallende misconcepties, veel gemaakte fouten)
1	E3	Parallellogram uitknippen, in 2 of 3 stukken knippen en een rechthoek van leggen.	6	4	2		- G: Nummer 3 kan met twee keer knippen ook uitkomen op een rechthoek van 1 bij 6. - F: Nummer 3 niet over roosterlijntjes. Dan uitkomen op 1 x 5 (2x).
2	E3	Tabel invullen waarin oppervlakte van parallellogram wordt uitgerekend en daaruit concluderen dat die gelijk is aan de oppervlakte van een rechthoek.	6	5	1		F: "Hoe schuiner, hoe kleiner de oppervlakte"
3	E3	Hoogte tekenen bij 2 parallellogrammen met gegeven basissen...	6	2	4		- F: de rechthoek die kan worden geknipt van het parallellogram wordt om de basis heen getekend. De hoogte wordt niet apart aangegeven (3x). - Het zou beter zijn als de basis ook nog moet worden aangegeven met de letter b.
3	E3	... en uitleggen waarom de hoogte soms buiten het parallellogram wordt aangegeven...	6	4	1	1	- G: "Omdat het loodrecht op elkaar moet". - G: "hij kan niet loodrecht omhoog". - G: "Je kunt niet van de ene naar de andere basis".
3	E3	... en vervolgens oppervlaktes berekenen.	6	6			G: de laatste niet gemaakt, waarschijnlijk in de les geen tijd meer voor gehad.

4	E4	Oppervlaktes van 4 gegeven parallellogrammen op ruitjespapier berekenen.	6	4	1	1	F: Alleen nummer 1 fout (2 x 10)
5	E5	Uitleg geven hoe de oppervlakte van een parallellogram uit te rekenen.	6	5	1		- De meeste leerlingen waren hier zelf nog niet aan toegekomen en hebben de klassikale bespreking overgeschreven. - F: "Rechthoekige delen een vierkant van maken (stuk erbij halen en een stuk eraf halen. Dezelfde grote)" - G: "Je doet hoogte vanaf de basis x de lengte van een basis".
6	E6	Oppervlaktes van 4 gegeven parallellogrammen uitrekenen. Daarvoor soms eerst hoogte uitrekenen met Pythagoras.	6	2	3	1	- F: Zwakke leerling in les waarschijnlijk t/m 5 gekomen (alles goed), en de rest thuis geprobeerd te maken, maar fout (verkeerde basis). - G: Zwakke leerling helemaal goed gemaakt (thuis hulp gekregen?) - NG: Eerste wel geprobeerd maar verkeerde basis. - F: Weinig ingevuld. Wat er staat laat zien dat de leerling niet weet hoe het aan te pakken. - F: Eerste twee fout (Pythagoras gebruiken in een eigen gemaakte driehoek waarvan je niet weet of hij recht is. De leerling ziet de onderste zijde steeds als basis). Laatste twee goed. - G: Helemaal goed.
7	E6	Oppervlakte van parallellogram uitrekenen...	6	2	2	2	- F: $7,5 \times 7,5 = 56,25$ - F: via inlijsten, maar slordigheidsfout maken bij berekenen AF.
7	E6	...en daarmee de bijbehorende hoogte bij de andere zijde bereken.	6		3	3	- F: Oppervlakte bij eerste vraag niet gebruikt. - F: CE uitrekenen in driehoek CDE, waarbij gedacht wordt dat $DE = 6$ (de helft). (2x)

Conclusie:

Het exploreren via de opgavenbladen verloopt niet goed. Er ontstaat verwarring door het laatste voorbeeld van opgave 1. Deze is lastig en wordt vaak verkeerd verknijpt. De begrippen basis en hoogte worden daarna geïntroduceerd middels de opgeplakte rechthoeken, maar deze zijn soms verkeerd geplakt. Deze begrippen lijken voor leerlingen niet duidelijk te zijn. Leerlingen tekenen bij opgave 3 vaak de rechthoek die je ervan kunt maken. Leerlingen houden aan dat idee vast en zien niet dat je de lengte en breedte van die rechthoek direct al in het parallellogram kan bepalen en dat noemen we dan de basis en de hoogte. Opgave 4 gaat wel goed, maar leerlingen blijven soms het parallellogram verknippen in gedachte tot een rechthoek en gebruiken dan niet het idee van basis en hoogte. Ze blijven vasthouden aan het idee van de rechthoek. Opgave 6 en 7 zijn vaak niet of fout gemaakt. Leerlingen komen daar met de voorgaande kennis niet uit.

Les 2 Oppervlakte van een driehoek

Datum: 23 maart 2016
Tijd: 08:45 – 09:35
Lokaal: 22

Opgave	6E-fase	Verwacht resultaat	Aantal	G	F	NG	Opmerkingen over uitwerkingen (bijv. opvallende misconcepties, veel gemaakte fouten)
1	E3	Een paar driehoeken uitknippen en een parallellogram van leggen.	6	6			G: wel een parallellogram, maar ruitjes sluiten niet mooi aan.
2	E3	Tabel invullen waarin oppervlakte van parallellogram wordt uitgerekend en de oppervlakte van één driehoek. Concluderen dat de oppervlakte van een driehoek de helft is van die van het parallellogram.	6	5	1		- G: conclusie 'hij blijft even groot'. Verkeerd gelezen? - G: conclusie 'ze hebben ieder dezelfde oppervlakte'. Verkeerd gelezen? - F: parallellogram $3 = 6 \times 4 = 24$. Ook geen conclusie ingevuld.
3	E3	Basis en hoogte aangeven in de drie driehoeken waarmee opgave 1 is gemaakt.	6	5	1		F: hoogte niet duidelijk aangegeven.
4	E4	Oppervlakte van 2 gegeven driehoeken berekenen.	6	6			
5	E5	Uitleg geven hoe de oppervlakte van een driehoek uit te rekenen.	24	19	5		- F: "je maakt er een rechthoek van. Daarvan bereken je de oppervlakte en die oppervlakte deel je door 2." - F: "je maakt er een rechthoek van en deelt het door 2. $B \times h : 2 = A$". - F: "breedte x hoogte : 2" ($2x$) - F: "stelling van Pythagoras of $b \times h : 2$"
6	E6	Oppervlaktes van 2 gegeven driehoeken uitrekenen. Daarvoor een keer eerst hoogte uitrekenen met Pythagoras.	6	3	2	1	- F: linker driehoek de hoogte verkeerd uitgerekend met Pythagoras. - F: $17 \times 12 : 2 = 102$ (17 als hoogte nemen, maar die staat niet loodrecht op LM).
7	E6	Oppervlakte berekenen van de gegeven gelijkbenige driehoek wordt op twee manieren aangepakt (andere basis en bijbehorende hoogte). Beoordelen bij welke aanpak genoeg informatie beschikbaar is en deze aanpak uitvoeren...	6	5		1	

7	E6	... en voor de andere aanpak nu met de bekende oppervlakte de hoogte berekenen bij de gekozen basis.	6	2	3	1	• F: $384 : 20 = 19,2$ • F: $192 : 20 \times 2 = 19,2$ • F: $192 = 20 \times h : 2$ dan $h = 19,2$
8	E6	Oppervlakte van twee vliegers die uit verschillende driehoeken bestaan berekenen.	6	2	2	2	• F: vergeten de oppervlakte te delen door 2. • F: wel goed op weg, maar niet afgemaakt, niet de gehele oppervlakte uitgerekend.

Conclusie:

De eerste opgaven van de opgavenbladen zijn goed gemaakt. Het exploreren verloopt goed. Bij opgave 1 kan ook een parallellogram worden gemaakt zonder dat de ruitjes mooi op elkaar aansluiten. Dat hebben enkele leerlingen gedaan en daardoor wordt het bepalen van de basis en de hoogte lastig. Bij opgave 3 is te zien dat leerlingen, in vergelijking met de vorige les, beter begrip hebben van de begrippen basis en hoogte. Meestal worden de juiste lijnstukken worden getekend. Opgave 4 en 5 gaan goed (E4 en E5). Opgave 6, 7 en 8, die een invulling geven aan fase E6, worden wisselend gemaakt. Bij opgave 6 is bij de linker driehoek de stelling van Pythagoras nodig om de hoogte te bepalen. Dat gaat soms fout. Bij opgave 7 worden bij de tweede vraag veel fouten gemaakt. De oppervlakte van de driehoek moet worden gebruikt. Met het delen door 2 van de oppervlakte raken leerlingen verward. Sommigen gaan weer vermenigvuldigen met 2. Opgave 8 is regelmatig niet gemaakt. Sommige leerlingen kwamen er wel uit, andere waren een goed einde op weg maar maken fouten door stukken over te slaan of niet te delen door 2.

Les 3 Omtrek van een cirkel

Datum: 30 maart 2016
Tijd: 08:45 – 09:35
Lokaal: 22

Opgave	6E-fase	Verwacht resultaat	Aantal	G	F	NG	Opmerkingen over uitwerkingen (bijv. opvallende misconcepties, veel gemaakte fouten)
1	E3	Diameter en omtrek van voorwerp opmeten en de factor bepalen.	6	6			
2	E3	Resultaten van opgave 1 van de hele klas verzamelen in tabel.	6	6			
3	E3	Gemiddelde factor v.d. klas berekenen.	6	6			
4	E4	De gemiddelde factor gebruiken om de omtrek bij een straal van 10 cm uit te rekenen.	6	6			
5	E5	Beschrijven wat gezegd kan worden over de diameter en omtrek van een cirkel.	24	19	5		- G: de diameter is ongeveer 3 keer zo klein als de omtrek (2x). - G: het is 3,5 keer zoveel. - G: diameter x omtrek = factor. - G: de diameter is bijna 3 x zo klein als de omtrek. - G: de diameter gebruik je om de omtrek van een cirkel te berekenen. Omtrek = d x factor. - G: diameter = 2x de straal. Omtrek = diameter x factor (3x). - G: diameter = omtrek : factor, omtrek = diameter x factor. - G: diameter = straal x 2. Omtrek = diameter x π (2x). - G: diameter is 2 x de straal. De diameter x π = de omtrek. - G: diameter x 3,4 = omtrek. - G: diameter x 3,4 = omtrek. Diameter = 2 x straal. - G: diameter = straal x 2, omtrek cirkel = diameter x factor, diameter is $\pm$ 3x zo klein als de omtrek. - G: de diameter is straal x 2. Omtrek is ongeveer 3x zo groot als de diameter. $O = d \times f$. - G: diameter x factor = omtrek. Omtrek : diameter = factor. Diameter is 2 x straal. - G: diameter is straal x 2. Omtrek = de diameter is ongeveer 3 x zo klein. - F: diameter is 2 x de straal. De straal x π = de omtrek.

							- F: met die twee bereken je de factor. - F: hiermee kun je de factor berekenen. - F: dat de diameter 20 is en de omtrek 68,9 is. $D = 2r$. - F: de diameter is meestal ongeveer 3 x zo klein als de omtrek.
6	E5	π invoeren op rekenmachine en opschrijven, π vergelijken met de gemiddelde factor van de klas, de eigen antwoorden van opgave 1 controleren met pi, de formule voor de omtrek van een cirkel geven, π gebruiken om de bij een straal van 10 cm uit te rekenen.	24	19	3	2	- F: bij vraag 2 $\pi - 3,448$; bij vraag 3 $26,7 - 3,3$; vraag 5 niet ingevuld. - F: bij vraag 4 $y = d \times \pi + 1,3$ (1,3 is het verschil tussen eigen gemeten omtrek en die volgens de berekening met pi); bij vraag 5 $20 \times \pi + 1,3 = 64,1$ (2x). - G: laatste vraag niet gemaakt (2x). - G: bij vraag 3 vergeleken met opgave 4 i.p.v. opgave 1 (5x). - G: bij vraag 2 en 3 hetzelfde antwoord als bij vraag 5. - G: bij vraag 3 geen verschil berekend (2x). - G: alleen vraag 3 fout: $0,31 \times 5,5$ (diameter) = 1,705. $3,1 - 1,705 = 1,395$. Het verschil is 1,395. - NG: vraag 4 en 5 niet gemaakt (2x).
6 (moet 7 zijn)	E6	Tabel invullen met straal/diameter/omtrek waarbij steeds 1 bekend is.	6	5		1	NG: niet alles ingevuld, alleen van de bovenste de omtrek berekend.
7	E6	Bij drie cirkels de gevraagde lengte berekenen (straal/diameter/omtrek) als 1 bekend is.	6	3	3		F: bij de laatste vergeten te delen door 2 voor de straal (3x)
8	E6	Omtrek van fietswiel berekenen met gegeven straal...	6	5	1		F: straal i.p.v. diameter gebruikt
8	E6	...en berekenen hoe vaak dat fietswiel rond heeft gedraaid tijdens een van 20 minuten met een snelheid van 18 km/u...	6	5		1	- NG: vraagteken erbij - G: afrondingsfout, maar verder goede berekening
8	E6	...en de straal van het achterwiel dat 3200 keer ronddraait tijdens diezelfde rit berekenen.	6	3	1	2	- NG: vraagteken erbij - F: $3200 / 1192 = 2,68$. 2,68 keer zoveel, dus $5,03 \times 2,68 = 13,5$
9	E6	Halve omtrek berekenen bij diameter die opgedeeld is in stukjes...	6	3	2	1	- F: eigen berekende factor van opgave 1 gebruikt i.p.v. pi. - F: $70 \times \pi$ i.p.v. $65 \times \pi$ (slordigheidsfout) - G: antwoord in cm i.p.v. meter
9	E6	...en gekronkeld stuk berekenen dat bestaat uit vier halve cirkels met gegeven diameter.	6	5		1	

Conclusie:

De eerste opgaven van de opgavenbladen zijn goed gemaakt. Het exploreren verloopt goed. Bij het expliciteren bij opgave 5 worden verschillende antwoorden gegeven. Bij de meeste zit er een juiste gedachte achter. 1 keer wordt aangegeven dat de omtrek gelijk is aan de straal $\times \pi$. Antwoorden als “met die kun je de factor berekenen”, of “dat de diameter 20 is en de omtrek 68,9”, of “de diameter is meestal ongeveer 3 x zo klein als de omtrek” tonen aan dat er nog geen begrip is van een vaste verhouding tussen diameter en omtrek van een cirkel. Deze antwoorden zijn weinig gegeven. Bij opgave 6 wordt kennisgemaakt met π , deze wordt vergeleken met de eigen factor van opgave 1 en de gemiddelde factor van de klas. Vervolgens wordt de factor π toegepast op een cirkel met straal 10, waar eerder de gemiddelde factor bij is gebruikt (opgave 4). Een paar onlogische antwoorden zijn gegeven, sommige vragen zijn niet gemaakt. Een herhalende uitwerking is die waarbij niet wordt vergeleken met de eigen factor en het eigen voorwerp, maar met het antwoord op opgave 4. Het gewenste antwoord bij vraag 5 wordt dus eerder al gegeven, 1 keer bij vraag 2 en 6 keer bij vraag 3. De vraagstelling is misschien onduidelijk. Leerlingen raken het overzicht kwijt. Opgave 6 (E6) wordt goed gemaakt. Bij de laatste vraag van opgave 7 wordt vaak vergeten nog te delen door 2 voor de straal. Leerlingen hebben moeite met de laatste vraag van opgave 8. Die wordt opengelaten of fout gemaakt. Opgave 9 gaat vervolgens bij de meeste leerlingen goed. Soms worden er kleine foutjes gemaakt.

Les 4 Oppervlakte van een cirkel

Datum: 4 april 2016
Tijd: 12:55 – 13:45
Lokaal: 43

Opgave	6E-fase	Verwacht resultaat	Aantal	G	F	NG	Opmerkingen over uitwerkingen (bijv. opvallende misconcepties, veel gemaakte fouten)
1	E3	Om 3 figuren die gelegd zijn van cirkelsectoren een rechthoek tekenen die de oppervlakte van het figuur benadert (boven iets over, onder iets te kort)	6	4	2		- G: wel de goede lijnen getekend, maar eerst verkeerd gedaan, de bovenste zijde van de rechthoek was te hoog getekend (waarschijnlijk na hulp van docent verbeterd). - F: de bovenste zijde van de rechthoek is te hoog getekend - F: zowel de onderste als de bovenste zijde van de rechthoek zijn in het figuur getekend.
2	E3	Aangeven dat de gelegde figuren steeds meer binnen de getekende rechthoeken vallen.	6	1	5		- F: de oppervlakte van de rechthoeken zijn wel even groot. - F: ze zijn allemaal even groot. - F: rechthoeken zijn hetzelfde. - F: hij is bijna gelijk (half goed). - F: ze hebben bijna dezelfde vorm (half goed). - G: ze lijken steeds meer op rechthoeken.
3	E3	Aangeven dat de hoogte van de getekende rechthoek steeds gelijk is aan de straal...	6	6			G: 2,5 (maar niet aangegeven dat dat de straal is, waarschijnlijk alleen opgemeten). (2x).
3	E3	... en aangeven dat de breedte van de rechthoek steeds meer gelijk wordt aan de halve omtrek...	6	4	2		- F: 7,8. $7,8 : 2,5 = 3,12 = \pi$ (opgemeten). - F: 8 - G: helft v.d. omtrek. Dit wordt vervolgens niet uitgerekend (2x). - G: de breedte is even groot als de helft van de omtrek. Dit wordt vervolgens niet uitgerekend (eerst de verschillende breedtes opgemeten en aangegeven dat ze steeds groter worden. Dit is doorgekrast). - G: 7,9. $15,8 : 2 = 7,9$ (onduidelijk of het is opgemeten of berekend via omtrek. Via omtrek kom je uit op $15,7 : 2$)
3	E3	... en oppervlakte berekenen via straal x halve omtrek.	6	1	4	1	- F: $2,5 \times 7,8$ (7,8 is opgemeten). - F: ook $2,5 \times 7,8$ (7,8 is opgemeten), terwijl vraag 2 goed is beantwoord. - F: $12,5 \text{ cm}^2$ (zonder duidelijke berekening). - F: 20 ($2,5 \times 8$)

							• NG: een antwoord is weggehaald met tip-ex.
4	E4	Oppervlakte van een cirkel berekenen via straal x halve omtrek. Straal is gegeven. En oppervlakte van een cirkel berekenen via straal x halve omtrek. Diameter is gegeven.	6	4	2		• G: maar de klassikaal opgestelde formule wordt gebruikt. • G: maar oppervlaktematen verkeerd omgerekend. • F: voor omtrek wordt de straal gebruikt i.p.v. de diameter. • F: omtrek wel goed berekend, maar voor oppervlakte cirkel verdeeld in 4 kwartcirkels en de opp. van 1 kwartcirkel berekend door straal x straal te doen.
5	E5	Uitleggen dat de oppervlakte van een cirkel gelijk is aan straal x halve omtrek, en de formule opstellen: opp. = straal x straal x π	26	5	1		• G: alleen de klassikaal opgestelde formule is opgeschreven ($3x$). • G: straal x (omtrek : 2) = opp. cirkel. Opp. cirkel = $r^2 \times \pi$. • G: opp = $r^2 \times \pi$. Opp = $r \times 0,5 \times$ omtrek. Omtrek = diameter x π. Opp = $r \times 0,5 \times$ diameter x π. Opp = $r \times r \times \pi$. Opp = $r^2 \times \pi$. • F: $\pi \times r^2 \times \pi$.
6	E6	Straal berekenen van een cirkel met bekende oppervlakte...	6	3	3		• F: i.p.v. de wortel nemen wordt gedeeld door 2 ($2x$). • F: wortel uit opp. is de straal.
6	E6	... en vervolgens de omtrek van die cirkel berekenen...	6	4	2		• F: straal wordt gebruikt i.p.v. de diameter. • F: $8,6^2 (r^2) = 73,9 =$ omt
6	E6	... en van een cirkel met bekende omtrek de oppervlakte berekenen.	6	3	3		• F: i.p.v. de wortel nemen wordt gedeeld door 2. En de straal wordt gebruikt i.p.v. de diameter. • F: $r \times (500 : 2) = r \times 250 =$ opp. (de formule straal x halve omtrek = opp. wordt gebruikt, maar de straal wordt niet uitgerekend). • F: 167,4 (geen berekening erbij).
7	E6	Oppervlakte van een cirkel met bekende straal berekenen...	6	6			
7	E6	...en aangeven met welk getal de oppervlakte wordt vermenigvuldigd als de straal 3 keer zo groot wordt...	6	2	2	2	• NG: snap ik niet • F: $24 \times 24 = 576$. Dit komt van $8 + 8 + 8 = 24$. • F: met 9, en dat is $\pi \times 3$ (antwoord goed, uitleg fout).
7	E6	...en aangeven met welk getal de omtrek dan wordt vermenigvuldigd.	6	3	1	2	• NG: snap ik niet • G: goede antwoord maar omtrek wordt uitgerekend met straal en niet met diameter. • F: $48 \times 48 = 2304$. Want de omtrek bereken je met de diameter en diameter is 2x de straal dus $24 \times 2 = 48$ dus $48 \times 48 = 2304$.

8	E6	Van een deel van een figuur die samengesteld is uit verschillende halve cirkels en een hele cirkel de oppervlakte berekenen om vervolgens de kosten uit de gegeven context uit te rekenen.	6	2		4	• NG: snap ik niet • NG: vraagteken • G: zwakke leerling helemaal goed. Thuis hulp gekregen?
8	E6	Van een deel van een figuur die samengesteld is uit verschillende hele cirkels de oppervlakte berekenen om vervolgens dit gedeelte uit te drukken in procenten van het geheel.	6	3		3	• NG: snap ik niet • G: maar andere percentage gegeven (verkeerd gelezen?). (2x) • G: zwakke leerling helemaal goed. Thuis hulp gekregen?
8	E6	Van een deel van een figuur die samengesteld is uit 2 hele cirkels de oppervlakte berekenen.	6	2	1	3	• NG: snap ik niet • G: zwakke leerling goed, alleen oppervlaktematen verkeerd omgerekend. Thuis hulp gekregen? • F: 40 en 30 als straal (straal verkeerd afgelezen, maar plaatje is onduidelijk, valt donker uit).

Conclusie:

Opgave 1 gaat grotendeels goed. De meeste leerlingen zien dat een benadering is wanneer je bovenin wat over houdt en onderin wat tekortkomt. Bij opgave 2 worden weinig juiste antwoorden gegeven. De getekende rechthoeken zijn namelijk niet even groot qua oppervlakte. De gelegde figuren gaan steeds meer op een rechthoek lijken, waarmee de oppervlakte te berekenen is. De vraagstelling had meer gesloten kunnen zijn en meer kunnen sturen naar het gewenste antwoord. Bij opgave 3 gaan leerlingen meten i.p.v. te redeneren vanuit hoe het figuur is ontstaan. Ook daar had de vraagstelling meer kunnen sturen naar het gewenste antwoord, en had met het opmeten meer rekening moeten worden gehouden. Het exploreren heeft erg lang geduurd en de docent moest intensief begeleiden. Het lesmateriaal had meer sturend kunnen zijn, zodat de docent minder tijd kwijt was met het begeleiden. Opgave 4, fase E4, gaat vrij goed. Het is niet duidelijk of leerlingen hiervoor de klassikaal opgestelde formule hebben gebruikt. Sommige leerlingen moesten na de klassikale bespreking opgave 4 nog maken. Bij opgave 5 staan bijna alleen delen van of de complete klassikale bespreking. Het is onduidelijk wel gedeelte leerlingen zelf hebben verwoord en tot welke wetmatigheden ze zelf zijn gekomen. Fase E6, opgaven 6 t/m 8, heeft grotendeels thuis plaatsgevonden. Leerlingen hadden zichtbaar moeite met die opgaven. Ze halen delen van de formule voor de omtrek en de oppervlakte door elkaar, ze werken kwadraten weg door te delen door 2. Opgave 7 is misschien verwarrend, aangezien andere wiskundige inhoud erbij betrokken wordt, terwijl de zojuist opgedane kennis nog pril is.

Bijlage 6.4: Resultaten van de vragenlijst

De leerlingen hebben de vragenlijst op 6 april 2016, twee dagen na de laatste 6E-les, op de computer ingevuld. Daar is een instructie aan voorafgegaan, waarbij het belang van eerlijk invullen (wat vind je echt?) is benadrukt. Bij iedere vraag/stelling kon de leerling kiezen uit de volgende mogelijkheden:

helemaal niet mee eens - niet mee eens - mee eens - helemaal mee eens

De volgende stellingen zijn in de aangegeven volgorde aan de leerlingen voorgelegd.

1. De herhaling aan het begin van de lessen over wat ik al moest kunnen voor die les, begreep ik.
2. Ik was benieuwd naar de oplossingen van de vragen die vervolgens werden gesteld (over het vergelijken van de rechthoek en het parallellogram gelegd met lucifers, over het vergelijken van de drie gekleurde driehoeken, over de zes gelijkzijdige driehoeken in de cirkel, en over de vierkanten in de cirkel en om de cirkel).
3. Ik werd aan het denken gezet door deze vragen.
4. Ik vond het leuk om na deze vragen vervolgens in groepjes aan het opgavenblad te beginnen.
5. Ik werd steeds aan het denken gezet bij de eerste opgave van het opgavenblad (de opgave waarbij je moest knippen en plakken, en waarbij je een touwtje om een voorwerp moest leggen, en waarbij een cirkel in een verschillend aantal gelijke stukken was verdeeld).
6. Ik kon de eerste opgaven van het opgavenblad maken.
7. Ik vond de eerste opgaven leuk.
8. Ik ontdekte de lesstof.
9. Het lukte me om met de nieuwe kennis uit de eerste opgaven van het opgavenblad de vervolgopgaven te maken.
10. Ik kon de opdrachten die zijn gemaakt vóór de klassikale bespreking/uitwisseling maken.
11. Ik kon in eigen woorden uitleggen wat ik had ontdekt.
12. Ik begreep de uitleg die we in het groepje hadden bedacht over wat we hadden ontdekt.
13. Ik kan uitleggen waarom geldt: Oppervlakte parallellogram = basis x hoogte
14. Ik kan uitleggen waarom geldt: Oppervlakte driehoek = basis x hoogte : 2
15. De opdracht met het opmeten van de omtrek met een touwtje zorgde ervoor dat ik de formule begrijp: Omtrek cirkel = diameter x π
16. Ik kan uitleggen waarom geldt: Oppervlakte cirkel = straal x straal x π
17. De vragen die werden gesteld bij de klassikale bespreking/uitwisseling over wat we in het groepje als uitleg hadden opgeschreven, kon ik beantwoorden.
18. Bij het maken van de opdrachten wist ik goed wat ik aan het doen was.
19. Ik had het gevoel dat ik een trucje aan het doen was bij het maken van de opdrachten.
20. Door de opdrachten in de les heb ik zelf de wiskunde kunnen ontdekken.
21. Door de opdrachten werd het voor mij duidelijk waar het over ging.
22. Door de opdrachten wist ik beter waarom de formules gelden en wat ze betekenen.
23. Ik begrijp de manier van oplossen: ik weet welke stappen ik moet zetten, en waarom ik die stappen moet zetten.
24. Ik vond het werken aan de opgavenbladen leuk.
25. Ik kon met mijn groepsleden fijn samenwerken.
26. Ik vond het prettig om te werken in een groepje.
27. Ik vind deze manier van wiskunde krijgen leuker dan met het boek.
28. Ik vind deze manier van wiskunde krijgen leerzamer dan met het boek.
29. Ik vind deze manier van wiskunde krijgen moeilijker dan met het boek
30. Ik moest meer nadenken met deze manier van wiskunde dan met het boek.
31. Ik begrijp het huiswerk nu goed.
32. Ik kan deze wiskunde nu goed onthouden.
33. Ik kan deze wiskunde nu goed gebruiken.
34. Ik zou graag vaker op deze manier les krijgen.

Hieronder staan de resultaten weergegeven. De antwoorden van de individuele leerlingen zijn samengevoegd en de verdeling per vraag is zichtbaar gemaakt in een frequentiebalk. De vragen die over hetzelfde onderwerp gaan zijn bij elkaar gezet. Sommige vragen komen bij terug bij meerdere categorieën.

Fase E1: evalueren van de begincompetenties

De herhaling aan het begin van de lessen over wat ik al moest kunnen voor die les, begreep ik.



Fase E2: engageren

Ik was benieuwd naar de oplossingen van de vragen die vervolgens werden gesteld...

Ik werd aan het denken gezet door deze vragen.

Ik vond het leuk om na deze vragen vervolgens in groepjes aan het opgavenblad te beginnen.



Fase E3: exploreren

Ik werd steeds aan het denken gezet bij de eerste opgave van het opgavenblad...

Ik kon de eerste opgaven van het opgavenblad maken.

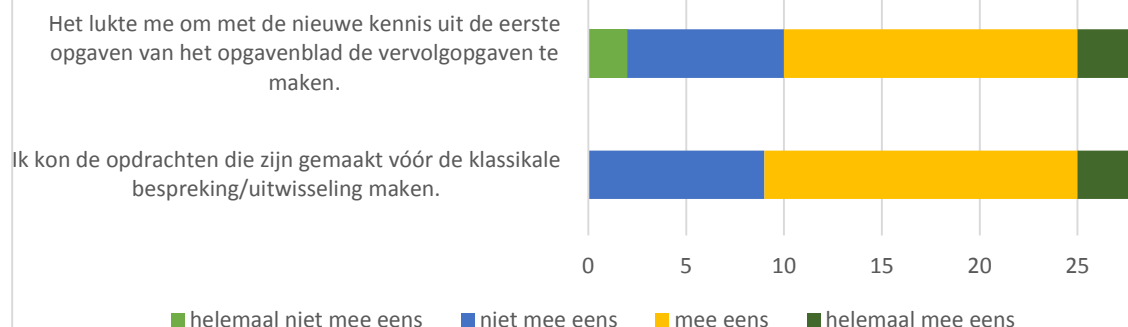
Ik vond de eerste opgaven leuk.

Ik ontdekte de lesstof.

Ik kon de opdrachten die zijn gemaakt vóór de klassikale bespreking/uitwisseling maken.



E4: Empirische kennis toepassen



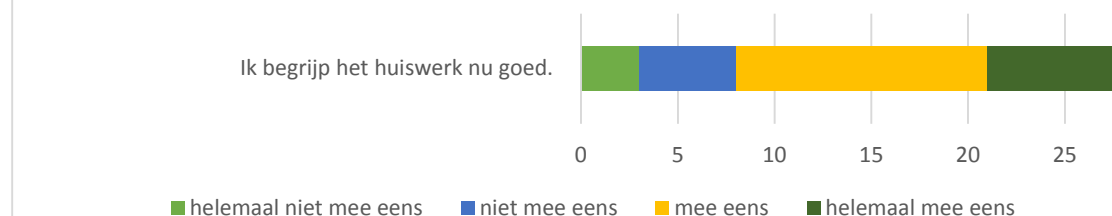
Fase E5a: zelfstandig expliciteren



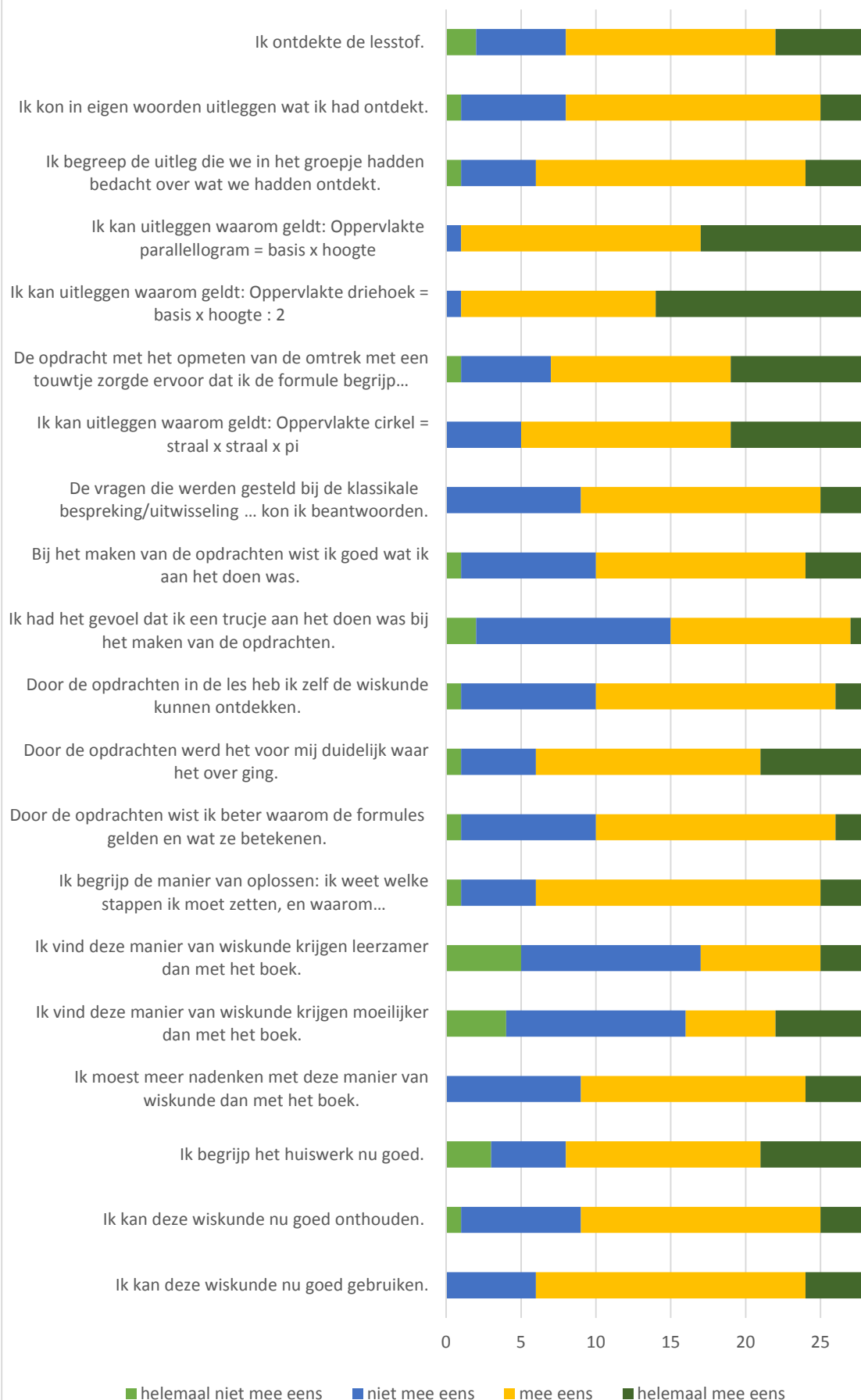
Fase E5b: klassikaal expliciteren



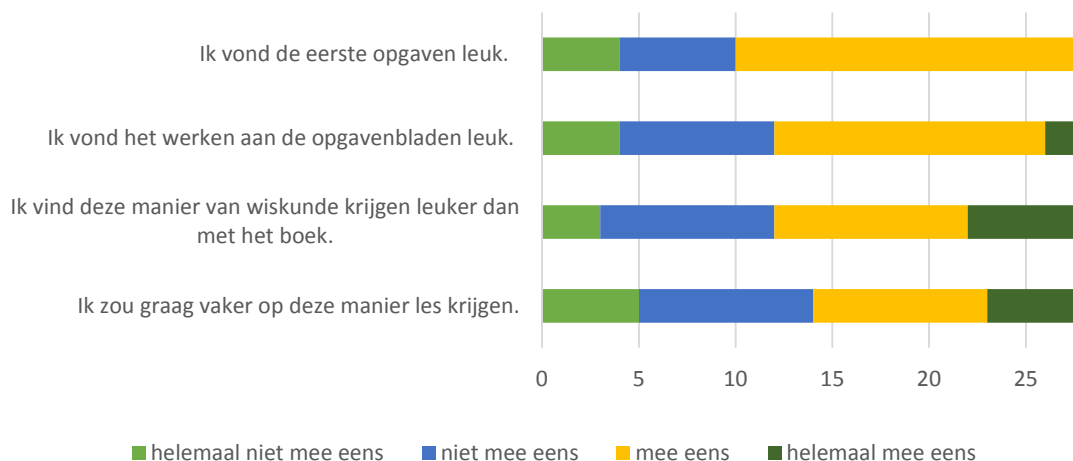
Fase E6: eindcompetenties consolideren



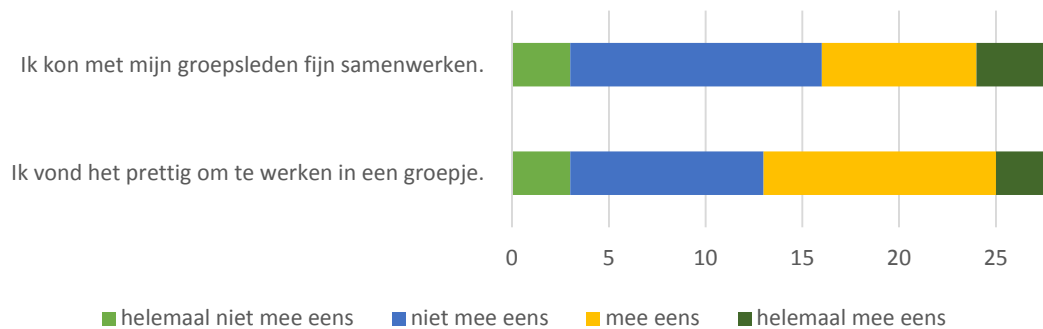
Weten 'waarom' / zelf ontdekken



Motivatatie



Samenwerken



Bijlage 6.5: Resultaten van het interview

Op 7 april 2016, drie dagen na de laatste 6E-les, en één dag na de afname van de enquête, zijn drie leerlingen geïnterviewd: één zwakke leerling (Z), één leerling uit de middengroep (M) en één sterke leerling (S). Deze interviews duurden 20 à 30 minuten. Tijdens de interviews zijn antwoorden kernachtig omschreven op een afnameblad. Daarna zijn aan de hand van de geluidsopnamen antwoorden van leerlingen en gestelde vragen aangevuld. Hieronder staan per vraag de gegeven antwoorden kernachtig en zo letterlijk mogelijk weergegeven. Daarbij staat aangegeven welke leerling dit antwoord gaf (Z, M of S). Als een vak is leeggelaten, is die vraag niet aan de betreffende leerling gesteld.

Hoe vond je deze manier van les krijgen? Hoe vond je hoe dat ging? Waarom?

Z	Op zich wel fijn. Alleen je krijgt geen theorie meer. Maar het is wel fijn dat je wel de belangrijkste opdrachten kunt maken. Ik denk dat dit wel het meeste is wat je voor de TRAP moet weten en dan kun je zo verder denken, en dan kom je er misschien wel zelf meer uit. Maar dat was soms ook wel lastig, want dan zit ik te moeilijk te denken, en dan kom ik er niet uit. Volgens mij kwam ik er bij de driehoeken helemaal niet uit, bij deze, opdracht 6. En opdracht 8.
M	Dat vond ik wel een fijne manier van les krijgen. Je wist eerst nog niks van het onderwerp, en steeds in de opdrachten kreeg je meer informatie 'o ja zo zit het'. Het was in stappen verdeeld, en je ontdekte het. De opgaven waren ook leuk om te doen, leuker dan in het boek. Bijvoorbeeld de opgave met die cirkel en die strook, en dan moest je zeggen wat er overeenkomt. Bijvoorbeeld die lange zijde in die strook, wat is dat in de cirkel. Dat is dan even nadenken, en dan kom je erachter.
S	Dat ik zelf kan werken in het boek vind ik fijner. Dan kan ik doorwerken. En als ik iets niet snap, dan staat erbij hoe je het moet doen.

Wat vond je een groot verschil tussen deze lessen en de normale lessen? Wat was heel anders voor jou?

Z	Hier moest je meer zelf doen denk ik. En ik denk dat met de andere opdrachten je veel tussendoor doet en dan gaat alles door elkaar. Opdrachten zijn net weer anders, en dan snap ik het niet en ga ik het door elkaar halen. Dat was hier wat minder.
M	Het zelf ontdekken. Door de opdrachten ontdek je het zelf. In de normale lessen is het anders. Het is allebei wel fijn, maar dit vind ik dan leuker. Want je weet er nog niks over, en krijgt steeds kleine opdrachten, en dat wordt steeds meer, en dan weet je het uiteindelijk.
S	Bij de laatste lessen moest je er zelf achter komen hoe je dingen moet doen. En bij normale lessen staat het er gewoon hoe je het moet doen. Dat je er zelf achter moet komen vind ik soms fijn, maar soms snapte ik een vraag thuis niet, en als de uitleg dan kwam, dan snapte ik het wel. Als ik het thuis niet begreep, vroeg ik het aan mijn ouders, en soms konden zij mij helpen en soms niet. Ik heb niet het boek erbij gepakt. Als ik ergens achter kwam, dan was het 'o ja zo zit', maar ook omdat je in een groepje werkt de ene snapt het wel, de ander heeft weer een ander idee. Dan duurt het ook langer om een opdracht te maken. Bij ons in het groepje snapt ik en K een opdracht al vaak, en S zei dan niet veel. Dan zeiden K en ik iets niet echt duidelijk en dan moesten we dat opnieuw uitleggen. Dan probeerde ik het haar wel uit te leggen, maar ik ben niet zo goed in uitleggen.

Hoe vond je de opdrachten/opgavenbladen die je kreeg in de les? Waarom?

Z	Ik vond het wel fijn werken. Maar soms in het groepje waren de andere veel verder, zij zijn veel beter in wiskunde en dan moest ik eigenlijk zeggen 'ja maar ik snap het niet'. Dat was best wel lastig. Want als ik het niet snapte, en de volgende snapte ik weer niet, dan was dat best wel lastig om elke keer te zeggen 'ik snap het weer niet', want dan houd je hun ook op. Als ik al veel had gevraagd, dan dacht ik ook misschien is het nu te veel, en dan vroeg ik het niet meer. Er was geen opgave waarbij ik het wel snapte en dat ik het de anderen kon uitleggen.
M	Ik vond de opdrachten duidelijk. Ik vond het overzichtelijk. Genoeg ruimte om in te vullen. Je wist ook wat je moest doen, dat was duidelijk aangegeven. Het is meer duidelijk dan in het boek. Opgave 3b en opgave 7 van les 4 waren wel minder duidelijk. Het was dan niet direct duidelijk wat het was. Dan ben je geneigd direct antwoord te geven.

S	Ik vond het fijn om een blad te hebben waar je de opdrachten op komt maken. De laatste vragen waren vaak de moeilijke vragen. Doordat je de hele tijd bezig bent, dan leer je de hele tijd wat meer, en de laatste vragen kun je dan ook beter maken.
---	---

Wat vond je moeilijk aan deze manier van les krijgen?

Z	Dat je alles zelf moest uitzoeken. En als je één opdracht niet snapte, kon je ook niet verder, dat waren vervolgoopdrachten.
M	Samen met een antwoord komen. Je denkt bij sommige opdrachten anders. Dan kan het zo zijn dat de een iets zegt en uiteindelijk dan gebruik je dat idee, terwijl je zelf ook een idee had. Maar dan schijnt dat antwoord wat je had opgeschreven van die ander is dan weer fout. En dan is er een beetje verwarring. Dat is dan wel lastig. Als je andere antwoorden had dan een groepsid, dan gingen we daar wel met elkaar op door, maar dat gaat ook van de werktijd af. We gingen er wel verder op in. Dus het was niet zo van 'oh dan zal het dat wel zijn', maar dan gingen we wel in discussie daarover. De verwarring ontstaat doordat je de rest van de opdrachten ook zo maakt. Als dat fout is, dan kan dat verwarrend zijn.
S	Sommige vragen kwam ik niet achter hoe het moest. Dan zit ik lang te denken hoe zit het nou. Bij normale lessen vind ik het dan fijn om gewoon in het boek te kijken.

Wat vond je makkelijk aan deze manier van les krijgen?

Z	Alles staat wel veel duidelijker dan in het boek. In het boek staat een heel verhaaltje en daar moet je het uit zien te halen, en hier staat wel duidelijk wat je moet doen.
M	Omdat de opdrachten duidelijk waren en het steeds in kleine stappen gingen, ga je er makkelijker doorheen. Makkelijker dan in het boek.
S	Soms weet iemand anders uit het groepje iets anders. En daar kun je ook van leren.

Hoe ging het samenwerken in je groepje? Wat vond je van het samenwerken in drietallen?

Z	De groepjes vond ik lastig, dat de anderen doorwerkte. Meestal zaten N en L te overleggen, en dan snapte ik niet wat ze zeiden en dan moesten ze het nog een keer uitleggen. Ik had liever met F in een groepje gezeten. Dat had ik wel fijn gevonden.
M	Goed. Iedereen luisterden naar elkaar. Je luisterde ook naar wat de ander bedacht had daarop, en wat zijn manier van denken was. En als je zelfstandig werkt, doe je dat niet. Dan houd je je eigen manier aan. Dat ging eigenlijk wel goed. Door de manier van de ander, ging je anders kijken naar opdrachten.
S	Het ging wel goed, maar ik werk vaak liever alleen. Bij andere vakken werk je vaak alleen, en dan zegt de docent 'nu mag je overleggen', maar dat is niet per se samenwerken. Vorige periode bij Frans zaten we soms in een groepje, en deze periode bij aardrijkskunde moet je een filmpje maken, en dan moet je wel in een groepje werken. Maar normaal in de lessen doen we dat niet. Bij het filmpje maken vind ik het wel fijn om samen te werken, dan weet een ander er meer van.

Kon je het huiswerk thuis zelfstandig maken? Waarom wel/niet? Van welke les wel/niet?

Z	Meestal de laatste opdrachten niet, die waren dan te lastig. Ik vond de huiswerkbepreking wel fijn. Daardoor snapte ik het wel. Als ik het nu zou moeten doen, dan zou ik er wel beter zelf uitkomen. Ik vond het wel goed dat er maar eentje werd besproken, want het waren meestal dezelfde soort opdrachten, en je moest met alles wel een beetje het zelfde doen.
M	Ja. Dat lukte me wel. Ik vond de huiswerkbepreking duidelijk. Het werd goed herhaald en het waren ook de goede opdrachten waar veel kinderen mee zaten dan. Als je het fout had, dan kon je met dat antwoord/de uitleg de opdrachten van hetzelfde opgavenblad weer verder maken. Eerst dacht ik er zijn wel meer opdrachten die moeilijk zijn dan alleen die ene die werd besproken, maar door die uitleg kon je weer verder.
S	Ja. Soms kwam ik de volgende les erachter dat ik iets fout had gedaan, maar dan snapte ik wel wat ik fout had gedaan. Ik vond de huiswerkbepreking duidelijk. Vaak werd de moeilijkste opdracht besproken waarin alles wat in het blad staat bij elkaar kwam.

Wat waren de moeilijke vragen? En waarom die?

Z	Blad 1: Opgave 6c en 7. 7 zou ik nu nog niet kunnen denk ik. Blad 2: Opgave 6, ik was er niet op gekomen om hem te draaien. En opgave 8. 8 begreep ik wel toen die op het bord werd gedaan.
---	--

	Blad 3: Opgave 8 en 9 heb ik met mijn neef gemaakt. Uit opgave 8 was ik sowieso niet zelf gekomen, opgave 9 was me misschien nog wel zelf gelukt. Blad 4: Opgave 7 en 8.
M	Blad 4: Opgave 6. Opgave 8a, om daar de denkbeeldige streepje te zien daar kwam ik niet achter. Ik dacht dat het bedekt werd door heel de klok.
S	Blad 1: Opgave 7. Blad 2: Opgave 6 een beetje. Soms denk ik een beetje te lastig na of lees ik de vraag niet goed. Dan helpen de mensen uit je groepje wel erbij. Blad 4: Opgave 1.

Wat waren de makkelijkste vragen? En waarom die?

Z	Blad 3: Opgave 7 snapte ik uiteindelijk wel door al die andere opdrachten die ervoor zaten.
M	
S	

Hoe zou je de lessen op volgorde leggen van makkelijk naar moeilijk? En waarom?

Z	Driehoeken – parallellogram – omtrek cirkel – opp. cirkel
M	Parallellogram – driehoeken – omtrek cirkel – opp. cirkel. Ik denk dat ie dan zo ligt, zoals de lessen.
S	Driehoeken – opp. cirkel – omtrek cirkel – parallellogram. Op de basisschool had iemand al verteld hoe je de oppervlakte van een cirkel kon berekenen, wat de formule was. Die wist ik al meteen. Bij het parallellogram lukte het wel als je de hoogte makkelijk kon leggen, zodat je een driehoek eraf kon halen en aan de andere kant kan plakken. Dan lukte het vaak wel in het begin. Maar als ie dan helemaal scheef stond, waardoor die niet kon, dan vond ik het wel lastig.

Zou je het vaker zo willen doen? Waarom?

Z	Ja, ik denk het wel. T.o.v. de normale lessen op zich wel deze. Ik vind het wel lastig hoe ik nou moet leren voor de TRAP. Je komt er nu wel beter achter of je het echt snapt of dat je verkeerd bezig bent met de opdrachten.
M	Ja dat zou ik wel willen. Ik vond het fijner werken. De opdrachten zijn duidelijker dan in het boek.
S	Ik heb liever het normale uit het boek.

Ik zie dat je ... hebt opgeschreven op dit opgavenblad, wat bedoel je daar mee?

Z	
M	Blad 1, opdracht 2: oh volgens mij hebben we dat niet verbeterd heb ik zo'n idee. Maar dat is volgens mij dat ie juist kleiner...ik begin even te twijfelen...die van het parallellogram was kleiner, dat ligt eraan hoe schuin die staat...Ik zat even na te denken als de parallellogrammen helemaal schuin doet, dan wordt het een rechte lijn, en dan heeft het helemaal geen oppervlakte.
S	

Ik zie dat je ... hebt geantwoord in de vragenlijst, waarom heb je dat antwoord gegeven?

Z	Vraag 4: Door het groepje. Omdat ik elke keer erachteraan werkte. Ik had het gevoel dat ik het niet snapte en dan kwam ik er thuis ook niet uit. Vraag 5: Ik denk dan niet zo snel 'dan zal het zo wel zijn'. Misschien omdat ik dat stapje dan nog niet heb gezet in mijn hoofd. Misschien dat ik dan eerst een opdracht moet maken en dan kijken dan snap ik de eerste opdracht wel wat ik daar gedaan heb. Vraag 8: Bij de middelste opdrachten begon ik pas te denken 'zo moet het'. Vraag 9: de eerste opdracht kon ik niet maken, en daarna ging ik pas denken 'o ja'. Je bent dan meer aan het oefenen en bewust bezig met dat is de straal en zo moet je het uitrekenen. Vraag 24: Met het groepje, ik vond het niet leuk om te werken als ik een beetje er achteraan...Met F dan zou ik er meer bij betrokken worden. Vraag 29: Nee, want de laatste opdrachten zag ik ook in het boek staan. Het maakte niet zo veel uit. Ik heb het boek thuis er niet bij gepakt.
---	--

	Vraag 31: ik begrijp het nu wel, maar als ik het weer zelf moet doen, dan denk ik dat ik vastloop.
M	<i>Vraag 19 heeft de leerling verkeerd geïnterpreteerd.</i>
S	Vraag 4: Ik vind het niet helemaal leuk om eraan te werken. Soms wel. Op zich vind ik wiskunde niet erg om te doen, maar als het moet is het toch anders. Vraag 7: Dat knippen. Ik had een hele makkelijke, volgens mij had K de moeilijke. Soms waren ze heel makkelijk, maar soms juist niet. Ik vond het veel werk om ze uit te knippen. Dat duurde best lang. Ik heb met K ook meegekeken met de moeilijke, maar dat lukte me niet. Daar kwam S uit, die had hem door. Vraag 20: Soms wist ik het al, maar vaak pas bij de uitleg. In de opdracht was het nog van 's het nou wel goed of is het nou niet goed'? Vraag 29: Vaak waren de vragen hetzelfde. Soms was 1 vraag specifiek heel moeilijk.

Bijlage 6.6: Resultaten van de proefwerkanalyse

Het hoofdstuk *Oppervlakte*, hoofdstuk 8, is getoetst op 13 april 2016, negen dagen na de laatste onderzoeksles. Daar zaten vier lessen wiskunde tussen:

- Dinsdag 5 april 2016:
1. Huiswerk van les 4 *oppervlakte van een cirkel* uitvoerig bespreken (opgave 6 en opgave 8 van het opgavenblad)
 2. Gemengde opgaven hoofdstuk 8 linker bladzijde maken
- Woensdag 6 april 2016:
1. Enquête voor onderzoek invullen
 2. Gemengde opgaven hoofdstuk 8 linker bladzijde bespreken
 3. Gemengde opgaven hoofdstuk 8 rechter bladzijde maken
- Maandag 11 april 2016:
1. Gemengde opgaven hoofdstuk 8 rechter bladzijde bespreken
 2. Oefenen met hoofdstuk 7 (extra oefening)
- Dinsdag 12 april 2016:
1. Extra oefening hoofdstuk 7 bespreken
 2. Oefenen voor proefwerk (hoofdstuk 7 of 8 extra oefening)

Het proefwerk ging naast hoofdstuk 8 *Oppervlakte* ook over hoofdstuk 7 *Procentuele groei*. Van het proefwerk gingen opgaven 2, 4 en 5 over hoofdstuk 8. In onderstaand schema zijn de resultaten per deelvraag weergegeven. Er is aangegeven hoeveel procent van het totaal aantal punten is behaald en hoe vaak een opvallende fout gemaakt is. De opgaven zelf volgen op dit schema.

	Paragraaf	Wiskundige inhoud	%	Opvallende fouten	
2a	8-2 Parallelogrammen	Oppervlakte parallellogram berekenen. Basis en hoogte allebei al gegeven.	98%	Verkeerde basis (13 i.p.v. 10)	1x
2b	8-1 Driehoeken	Oppervlakte driehoek berekenen. Basis is gegeven. Hoogte berekenen met Pythagoras. Hoogte valt buiten de driehoek. Afronden op één decimaal.	56%	Oppervlakte vergeten te delen door 2 Verkeerde basis (10 i.p.v. 7)	7x 4x
2c	8-2 Parallelogrammen	Lengte van een lijnstuk berekenen. Afronden op één decimaal. Dit lijnstuk is de bijbehorende hoogte bij een gegeven basis. Oppervlakte parallellogram berekenen met de andere zijde als basis en de bijbehorende hoogte uitrekenen met Pythagoras. Vervolgens lijnstuk berekenen m.b.v. bekende oppervlakte.	54%	Niet gemaakt Oppervlakte parallellogram uitgerekend, maar niet weten hoe nu het lijnstuk uit te rekenen Hoogte uitrekenen (VR) en niet verder gemaakt	6x 4x 3x
4	8-4 Oppervlakte van een cirkel	Een contextsom waarbij de totale oppervlakte van een cirkel met een rand eromheen gegeven is. Ook de diameter van de cirkel zonder rand is bekend. Uitrekenen of de oppervlakte van de cirkel zonder rand groter is dan de oppervlakte van de rand.	96%	De rand is de helft van de totale oppervlakte ($1600 : 2 = 800$)	2x

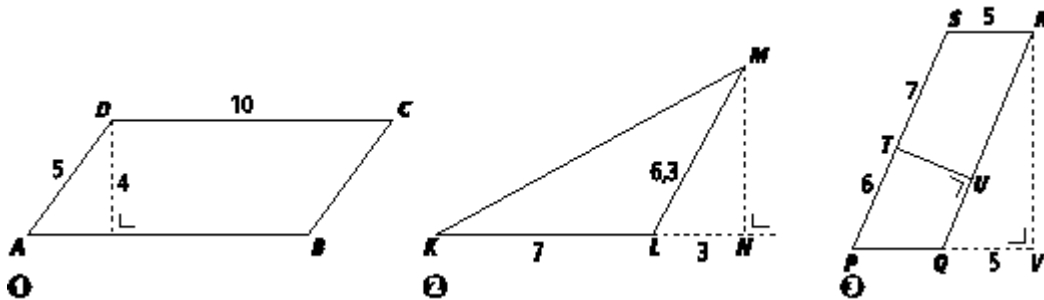
5a	8-1 Driehoeken	Een contextsom waarin de oppervlakte van een figuur moet worden uitgerekend (dak van gebouw). Deze bestaat uit een gelijkzijdige driehoek met zijden van 60 meter en twee halve cirkels die precies aan één zijde vastzitten. De straal van één zo'n halve cirkel is dan 15 meter. Afronden op twee decimalen.	57%	Oppervlakte van gelijkzijdige driehoek is zijde x zijde : 2 (geen rekeningen houden met het feit dat de basis en hoogte loodrecht op elkaar moeten staan)	15x
	en			Oppervlakte van gelijkzijdige driehoek vergeten te delen door 2	7x
	8-4 Oppervlakte van een cirkel			Verkeerde diameter cirkel (60 i.p.v. 30)	6x
				Oppervlakte cirkel x 2 terwijl 2 halve cirkels 1 hele cirkel maken	3x
				Opp. cirkel = diameter x π	1x
5b	8-3 Omtrek van een cirkel	Vervolg op 5a waarbij de oppervlakte van de muren van het gebouw moeten worden berekend. Deze bestaat uit 2 rechthoeken en uit twee halve cilinders. Voor de oppervlakte van de halve cilinders moet eerst de omtrek van de halve cirkels worden berekend. Totale oppervlakte nog vermenigvuldigen met de prijs van verfkosten per vierkante meter.	60%	Omtrek cirkel x 2 terwijl 2 halve cirkels 1 hele cirkel maken	3x
				Omtrek gebouw of alleen omtrek van cirkel vergeten te vermenigvuldigen met de hoogte	3x
				Niet gemaakt	2x
				Oppervlakte van 3 i.p.v. 2 rechthoeken berekenen	2x
				Omtrek cirkel = straal x straal x π	1x
				Inhoud berekenen van gebouw i.p.v. oppervlakte muren (opp. dak x hoogte)	1x

Conclusie:

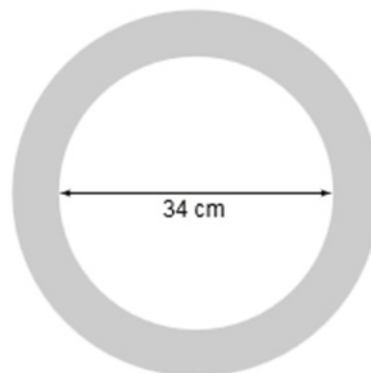
Bij de oppervlakte van een parallellogram lukt het ongeveer 1 op 3 leerlingen niet om een hoogte uit te rekenen m.b.v. een andere basis en bijbehorende hoogte. In het bijbehorende opgavenblad kwam dit wel terug in de laatste opgave, maar bij de bespreking tijdens de volgende les vonden de leerlingen dat ook lastig. Deze opgave kwam letterlijk uit het boek. In het boek staat nog een opgave die aandacht besteed aan de oppervlakte berekenen op twee manieren (een van de twee verschillende zijden als basis kiezen met een bijbehorende hoogte). Deze is niet opgenomen in het opgavenblad. Bij de oppervlakte van een driehoek vergeet tot twee keer toe een kwart van de leerlingen te delen door 2. Wanneer de hoogte buiten de driehoek valt, zien vier leerlingen het verlengde van de basis als onderdeel van de basis. Bij het berekenen van een oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek houdt meer dan de helft van de leerlingen geen rekening met het feit dat de basis en hoogte loodrecht op elkaar moeten staan en je dus niet een zijde als hoogte kan nemen.

De omtrek van de cirkel kwam weinig terug in het proefwerk. Eén leerling heeft de formule voor omtrek verwisseld met die voor oppervlakte. Het rekenen met halve cirkels gaat bij drie leerlingen fout, zowel bij de oppervlakte als de omtrek: twee halve cirkels maken 1 hele cirkel, je legt ze tegen elkaar aan. Bij het bepalen van de straal om de oppervlakte te berekenen houden 6 leerlingen hier ook geen rekening mee.

2



- (1) a Bereken de oppervlakte van parallellogram $ABCD$.
 - (2) b Bereken de oppervlakte van $\triangle KLM$. Rond af op één decimaal.
 - (3) c Bereken de lengte van TU in parallellogram $PQRS$. Rond af op één decimaal.
- 4 Hieronder zie je links een foto van een dartbord en rechts een tekening ervan.

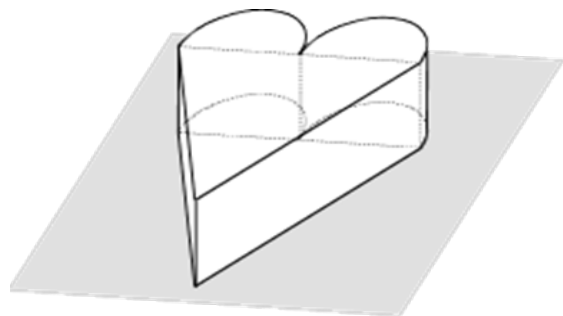


- (3) De oppervlakte van het hele dartbord is 1600 cm^2 . Een cirkel met een diameter van 34 cm verdeelt het dartbord in twee delen. Een dartpijl binnen die cirkel levert punten op, een dartpijl in de donkere rand daarbuiten levert geen punten op.
Is de oppervlakte van het deel waarin je punten scoort groter dan de oppervlakte van het deel waarin je geen punten scoort?
Laat je berekeningen zien.

- 5 Hiernaast zie je het ontwerp van een schoolgebouw in de vorm van een hart.

De plattegrond van het hart wordt gevormd door een **gelijkzijdige driehoek met zijden van 60 meter** en daarop **2 halve cirkels**.

De hoogte van het gebouw is 7 meter.



- (3) a Bereken de oppervlakte van het dak. Rond je antwoord af op 2 decimalen.
- (3) b De muren van het gebouw worden geverfd. De kosten daarvan zijn € 20,- per m^2 . Bereken hoeveel de school kwijt is aan verfkosten (Je hoeft geen rekening te houden met de ramen en deuren).

Bijlage 7: Beoordelingsformulier onderzoeksplan

Naam student: Ward Perenboom _____

E-mailadres student: w.perenboom@live.nl _____

Studierichting (vak + vt/dt): wiskubde _____

Studentnummer: _____

Naam school: Udens College _____

Naam en e-mailadres begeleider school: Rodica Ernst, R.Ernst@udenscollege.nl _____

Naam en e-mailadres begeleider ILS HAN: Ton Konings _____

Naam studieloopbaanbegeleider: Ton Konings _____

Naam en e-mailadres 1° examiner: Frank van Merwijk _____

Naam en e-mailadres 2° examiner: _____

(Werk)Titel afstudeeronderzoek: Het 6E-model en het hoofdstuk Oppervlakte _____

Datum: 9-3-'16 _____

Gelegenheid: 1 _____

Ontvankelijkheidseis:

De omvang van het onderzoeksplan voldoet aan de eisen (5-8 A4)

In orde / niet in orde

criterium	omschrijving	Voldaan/niet voldaan	Feedforward
Bronvermeldingen	De wijze waarop verwezen wordt naar bronnen is volgens APA-richtlijnen.		
Taaleisen	Het onderzoeksplan bevat gemiddeld genomen niet meer dan één spel- of taalfout per pagina. Daarnaast bevat het plan een duidelijke rode draad en is het logisch opgebouwd. Alinea's zijn verbonden tot een coherent geheel. Relaties tussen tekstdelen (alinea's, paragrafen, hoofdstukken) worden gelegd. Verbindings- en verwijswoorden worden juist gebruikt. Het plan is afgestemd op het doel (i.e. de lezer ervan overtuigen dat het onderzoek relevant, onderzoekbaar en uitvoerbaar is).		
Ethiek en onafhankelijkheid	De student houdt zich aan de gedragscode/ eisen vanuit de wet op persoonsgegevens. De student laat overwegingen van ethiek en onafhankelijkheid meewegen bij alle stappen van het onderzoek	Nog niet van toepassing	
Betrokkenheid belanghebbenden	Over de opzet van het onderzoek is de student een open dialoog aangegaan met betrokkenen.		De betrokkenheid en wensen van de school op dit onderwerp zijn nergens beschreven
Planning	Er is een uitgewerkte en realistische planning van het onderzoek per week opgenomen.		

1.Probleemverken-ning	Voldoende	Goed	Feedforward
1.1 Aanleiding, context en probleem	De aanleiding en context geven duidelijk aan vanuit welke handelingsverlegenheid / praktijkprobleem en context het onderzoek tot stand is gekomen. Het probleem wordt helder beschreven	Vorige + De beschrijving is kernachtig geschreven.	Wards eigen persoonlijke overwegingen zijn beschreven. Het probleem van de school wordt niet duidelijk
1.2 Theoretisch kader: begrippen	Met behulp van literatuur zijn de begrippen die gebruikt worden duidelijk beschreven en/of gedefinieerd.	Vorige + Diverse interpretaties van begrippen in de literatuur worden tegen elkaar afgewogen om tot een werkdefinitie te komen.	
1.3 Theoretisch kader: bespreking van perspectieven	De probleemverkenning is een samenhangend logisch betoog. Er zijn relevante en actuele bronnen gebruikt om het probleem te verkennen. Mogelijke oorzaken van en oplossingsrichtingen voor het probleem worden vanuit verschillende perspectieven verkend: zowel vanuit de literatuur als vanuit de onderzoekscontext (praktijksituatie). De student maakt op basis van theorie en praktijk een onderbouwde keuze voor één van de perspectieven of een combinatie daarvan, die leidt tot de onderzoeksvragen. Er wordt minimaal één op HBO- of wetenschappelijk onderzoek gebaseerde publicatie gebruikt.	Vorige + De gebruikte bronnen zijn ook internationaal georiënteerd en geven inzicht in en overzicht over de diverse (toonaangevende) opvattingen ten aanzien van het probleem en mogelijke oplossingen. Theoretische- en praktijkopvattingen worden vanuit een kritische distantie besproken. Het betoog is beknopt en precies. Er worden minimaal twee of meer op HBO- of wetenschappelijk onderzoek gebaseerde publicaties gebruikt.	
1.4 Onderzoeksvraag	De onderzoeksvraag wordt onderbouwd door de probleemverkenning en doelstelling. In de hoofdvraag en eventuele deelvragen is duidelijk naar welke informatie of inzichten wordt	Vorige + De formulering van de hoofd- en deelvragen is specifiek en eenduidig. Duidelijk is hoe de vragen in samenspraak met belanghebbenden (bijv.	

	gezocht. Deze vragen zijn via onderzoek te beantwoorden. Eventuele deelvragen leveren noodzakelijke gegevens op voor het beantwoorden van de hoofdvraag. De deelvragen hangen onderling samen.	opdrachtgever) tot stand zijn gekomen.	
2.Uitvoering van het onderzoek	Voldoende	Goed	Feedforward
2.1 De onderzoeksgroep	De (selectie van) onderzoeksgroep(en) is beschreven en onderbouwd. Daarbij is aandacht voor de kenmerken van de onderzoeksgroep(en) in relatie tot de onderzoeksvraag en/of het onderzoeksdoel.	Vorige + De (selectie van) de onderzoeksgroep(en) is verantwoord vanuit criteria zoals representativiteit en betrouwbaarheid.	
2.2 Onderzoeksmethode	De te volgen onderzoeksmethode(n) is navolgbaar beschreven en passend om de onderzoeksvraag te beantwoorden. De gemaakte keuzes in en voor de methode(n) zijn onderbouwd.	Vorige + Er is daarbij aandacht voor de beperkingen van de gekozen werkwijze.	
2.3 Instrumenten	De in te zetten instrumenten zijn duidelijk beschreven. De student onderbouwt hoe hij een bewuste keuze heeft gemaakt uit meerdere instrumenten. De samenhang tussen de onderzoeksinstrumenten is duidelijk.	Vorige + Validiteit en betrouwbaarheid van instrument(en) ten aanzien van de onderzoeksvraag zijn overtuigend en kritisch belicht.	
2.4 Dataverzameling	De wijze waarop en de mate waarin de dataverzameling gaat plaats vinden wordt navolgbaar beschreven evenals mogelijke knelpunten in de uitvoering. Uit de beschrijving van de werkwijze van dataverzameling wordt duidelijk	Vorige + Overwegingen m.b.t. validiteit en betrouwbaarheid van de opzet worden expliciet besproken.	

	dat de student de gegevens systematisch en doelgericht gaat verzamelen.		
2.5 Analyse van verzamelde gegevens	De opzet voor data-analyse is navolgbaar beschreven en verantwoord. Uit de beschrijving van de (werkwijze van) analyse wordt duidelijk dat de student de gegevens systematisch gaat analyseren.	Vorige + Overwegingen m.b.t. validiteit en betrouwbaarheid van de (wijze van) analyse worden expliciet besproken.	Er is nog geen beschrijving van het met elkaar in relatie brengen van de resultaten. Er staat wel een mooi overzicht van de volgorde van de inzet van de instrumenten. Op basis hiervan is een goede analyse te verwachten.

Advies:

☒ Positief: in het onderzoeksplan is de onderzoeksopzet, in het licht van de (waar nodig aangescherpte) probleemverkenning, de doelstelling(en) en de onderzoeksvraag, voldoende uitgewerkt om het onderzoek verder uit te voeren (zie feedforward). Zie onderstaande opmerkingen

☐ Negatief (zie feedforward).

Toelichting

Beste Ward,

Neem ook het belang van de school in je onderwerp op in je plan/verslag

Je hebt een indrukwekkende hoeveelheid literatuur in je plan opgenomen, in het theoretisch kader en in de bijlage. Wat je niet direct gebruikt voor je onderzoek mag er ook weer uit. Je zou uit de documenten van Streun en Drijvers in je theoretisch kader citaten kunnen halen ter versterking van je keuze voor het 6E-model.

Belangrijk voor het onderzoeksverslag is dat de hoeveelheid pagina's binnen de aangegeven marges blijft. Daarvoor kun je je theoretisch kader tot hoofdzaken beperken en bijvoorbeeld de grote beschrijvingen van het 6E-model en delen van het ontwerp van lessen en materiaal in de bijlage zetten.

Ik verwacht een levendig onderzoek en een rijk verslag.

Succes,

Frank

Datum en paraaf Examinator 1

9-3-'16



Datum en paraaf Examinator 2