Destructability in een Virtuele Omgeving

Alexander Grooff
10099433

3 juni 2014

Samenvatting

Om simulaties realistisch te maken moeten objecten in een virtuele omgeving stuk kunnen gaan. Dit kan behaald worden door *destructability* toe te voegen. Destructability beschrijft de wijze waarop een object kapot gaat.
Er is onderzoek verricht naar het simuleren van destructability. Eerst is er gekeken naar de theoretische werking achter destructability waar verschillende fysische onderwerpen zoals materiaalkunde aan bod komen. Vervolgens is er gekeken hoe destructability gesimuleerd kan worden.
Na een overzicht gemaakt te hebben van alle mogelijke opties komen drie verschillende methodes aan bod om destructability mee te simuleren, waaruit *Havok Destruction* als beste naar voren komt.
Uiteindelijk blijkt dat er een groot verschil zit tussen de theoretische werking en de methode waarop er gesimuleerd wordt. In de simulatie wordt er gebruik gemaakt van impuls-eenheden, terwijl er in de theorie beschreven wordt dat stress-eenheden gebruikt moeten worden.

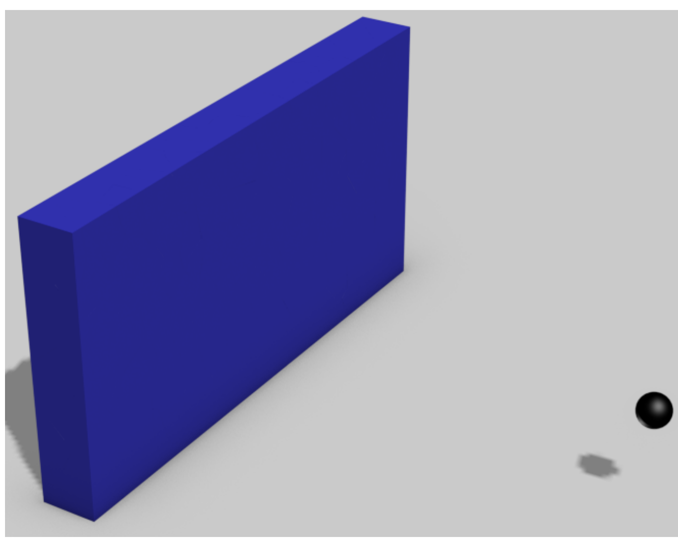
Inhoudsopgave

1 Inleiding

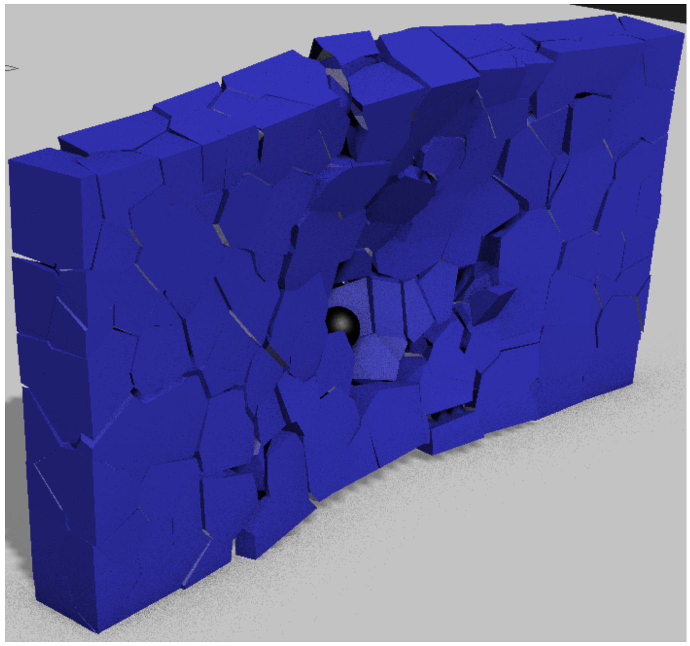
Om simulaties zo realistisch mogelijk te maken moeten objecten in een virtuele omgeving stuk kunnen gaan. Zo moet een explosie realistische schade kunnen aanrichten aan een huis. In veel simulatie-omgevingen zijn deze schademodellen met de hand door een artiest gemaakt op basis van een physics engine.
Om te zorgen dat een object kapot kan gaan wordt *destructability* toegevoegd. Er wordt een onderzoek opgesteld uit opdracht van TNO, afdeling Modelling, Simulation & Gaming, om de werking achter destructability te onderzoeken. Dit onderzoek wordt begeleidt door Robbert Krijnen en Ruben Smelik en wordt uitgevoerd door Alexander Grooff.

1.1 Destructability

Uit ervaring blijkt dat destructability een lastig onderwerp is in de simulatiewereld. Het grote obstakel lijkt te liggen bij het feit dat elk object op een andere manier breekt, plus dat er gerekend moet worden met een groot aantal deeltjes. Een van de bekende namen in de destructability-wereld zijn *Havok Destruction* en *RayFire* (meer hierover in hoofdstuk 3).
Om het probleem duidelijk uit te leggen wordt er gebruik gemaakt van een voorbeeld in figuur 1 en 2. Hier is een kanonskogel zichtbaar die een muur nadert.



Figuur 1: Kogel die op het punt staat tegen een muur aan te stoten



Figuur 2: Voorbeeld van destructability

Als de kogel de muur raakt kunnen een of meerdere mogelijke scenario's gebeuren:

- De kogel raakt de muur hard genoeg om de muur te laten breken.
- De kogel raakt de muur hard, maar niet hard genoeg om de muur te breken. De muur deformeert.
- De kogel raakt de muur te zacht, waardoor de muur noch de kogel breekt.
- De kogel is niet stevig, dus de kogel breekt zodra deze op de muur inslaat.
- De kogel is niet stevig, dus de kogel deformeert zodra deze op de muur inslaat.

Wat opvalt bij al deze scenario's is dat het belangrijk is om te weten hoe sterk de kogel/muur is en hoe hard de kogel de muur raakt.

1.1.1 Wat is het nut van destructability?

Destructability heeft meerdere toepassingen zoals games, simulaties en serious games. Destructability kan gebruikt worden om een indrukwekkende explosie te maken, of om duidelijkheid te bieden over de sterkte van een materiaal/object.

Game/film-industrie

Bij games wordt destructability toegepast om een overweldigend gevoel te geven zodra de speler iets kapot maakt. Hiervoor is het voornamelijk belangrijk dat destructability vooral visueel goed oogt, maar de fysische kant minder van toepassing is. Bij spellen zoals *Call of Duty* of *Battlefield*, maar ook bij films zoals *The Avengers* wordt gebruik gemaakt van destructability waarmee bijvoorbeeld explosies een visueel indrukwekkende weergave krijgen.

Figuur 3: Destructability in Battlefield 3

Serious games

Bij serious games is het belangrijk dat de gebruiker geïnspireerd wordt of kennis opdoet door een spel te spelen . Een goed voorbeeld (en tegelijkertijd ook het doel van TNO) is om een gevechtssimulatie te maken voor soldaten. Hierbij kan een soldaat door de straten lopen binnen het vijandelijke territorium, waar plotseling een terroristische aanslag gepleegd kan worden. Stel dat er een autobom ontploft, dan is het noodzakelijk om de explosie zo realistisch mogelijk te simuleren, op zowel het visuele als het fysische aspect. Dit moet er voor zorgen dat de speler gaat handelen net zoals bij een werkelijke explosie. Scherven en brokstukken van de geëxplodeerde auto moeten dus ook zo realistisch mogelijk door de lucht vliegen om het gevoel te geven van een gevaarlijke situatie.

Simulaties

Destructability kan ook worden toegepast bij het simuleren van explosies. Onderzoeksvragen zoals *wat gebeurt er zodra **x** op **y** wordt afgevuurd* zijn onderwerpen die prima voorbeelden zijn voor simulaties waarbij destructability betrokken is. Bij dit soort simulaties is het voornamelijk van belang dat het fysische aspect zo realistisch mogelijk wordt gesimuleerd.

1.2 TNO

Het onderzoek wordt uitgevoerd onder opdracht van TNO (*Nederlandse Organisatie voor Toegepast Natuurwetenschappelijk Onderzoek*). TNO richt zich voornamelijk op het toepassen van wetenschappelijke kennis in de praktijk. Onder de tak *Defensie en Veiligheid* zit de afdeling *Modelling, Simulation & Gaming* (MSG). MSG richt zich voornamelijk op het ontwikkelen van serious games en simulaties voor (onder andere) het Ministerie van Defensie.

1.3 Onderzoeksvraag

Om op een realistische manier destructability te simuleren is het noodzakelijk dat het zowel volgens realistische en fysisch-correcte methodes wordt aangepakt als dat het er visueel aantrekkelijk uit ziet. Daarom luidt de hoofdvraag van dit onderzoek: *hoe kan destructability zo goed mogelijk gesimuleerd worden*?
Dit brengt ook gelijk een aantal vragen met zich mee.

- Wat zorgt er voor dat een object breekt/deformeert?
- Op wat voor een manier breekt een object?
- Welke variabelen zijn belangrijk bij het berekenen van destructability?
- Welke software kan TNO gebruiken om destructability te simuleren?

1.4 Verschil tussen theorie en praktijk

Om een duidelijk onderzoek te stellen zijn er een aantal beslissingen gemaakt. Uit ervaring blijkt dat de simulatie-software en de theoretische werking achter destructability dermate veel verschillen dat de twee onderwerpen apart worden behandeld. Daarom is er gekozen om de theorie en praktijk/simulaties apart te houden. In hoofdstuk 2, Theorie, wordt er beschreven wat de theoretische werking achter destructability is, terwijl in hoofdstuk 3, Simulaties, wordt gesproken over de werking van de simulatiesoftware (Havok Destruction).

2 Theorie

In dit hoofdstuk wordt er gesproken over de theoretische werking van destructability. Er wordt gesproken over de sterkte van materialen, dat wordt uitgedrukt in de eenheid van stress. Hiervoor wordt dus eerst duidelijkheid geboden over stress, wat het precies is en welke varianten van stress er zijn.

2.1 Aannames

Er worden in het onderzoek een aantal aannames gemaakt om de doelstelling te versimpelen. De gemaakt aannames zijn:

- Thermodynamische effecten die meespelen in het destructability proces worden beschouwd als verwaarloosbaar;
- Quasistatische effecten zoals metaalmoeheid worden beschouwd als verwaarloosbaar

Deze aannames zorgen er voor dat de nadruk wordt gelegd op de mechanische kant achter destructability.

2.2 Stress

Een object breekt/vervormt zodra er genoeg stress op wordt uitgeoefend. Deze stress die op het object wordt uitgeoefend is te berekenen op de volgende manier[1]:

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{1}$$

waarin:

σ	=	Druk	$[\frac{N}{m^2}]$
F	=	Kracht	$[N]$
A	=	Raakoppervlak	$[m^2]$

De stress die een object uitoefent op een ander object is afhankelijk van het raakoppervlak en de kracht die het object uitoefend. De stress is dus een indicator over de verdeling van de kracht over het raakoppervlak. Zo oefent een veel grotere kogel met dezelfde kracht minder stress uit dan een kleinere kogel met dezelfde kracht. Dit komt omdat de oppervlakte die de grote kogel bestrijkt groter is en dus de stress kleiner is. De stress neemt evenredig af met het raakoppervlak.

Stress is in een aantal soorten te onderscheiden. Per soort wordt er op een andere manier stress uitgeoefend op het object. Dit maakt het cruciaal om te weten welke soort stress er wordt uitgeoefend op het object.

2.2.1 Rekstress

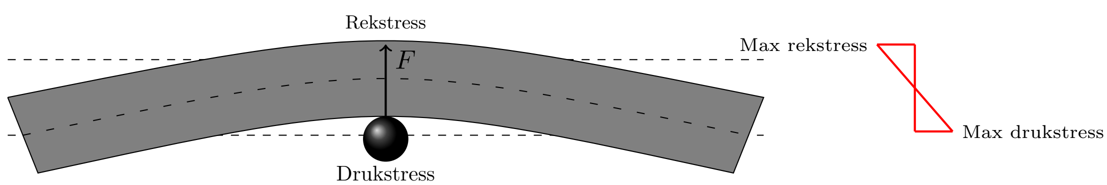
De rekstress is de stress wat wordt waargenomen zodra er aan een object wordt getrokken. Dit houdt in dat er aan weerskanten van het object druk wordt uitgeoefend in de richting van elkaar af. Dit zorgt er voor dat het object wordt uitgerekt. De rekstress is te berekenen met formule (1). De rekstress wordt gebruikt bij objecten die zeer dun zijn.

2.2.2 Drukstress

De drukstress is het tegenovergestelde van de rekstress. De drukstress is de stress die wordt waargenomen zodra er op het object gedrukt/geduwd wordt. Hierbij wordt aan weerskanten druk naar elkaar toe uitgeoefend, wat er voor zorgt dat het object wordt ingedrukt. Deze drukstress is ook te berekenen met formule (1), maar wordt alleen gebruikt bij het geval dat het object compressie ondervindt.

2.2.3 Flex-stress

Vaak wordt de rekstress gebruikt als uniforme stress, om zo het proces te versimpelen. Theoretisch gezien is eigenlijk de combinatie van de rekstress en de drukstress de uniforme stress. Welke stress geldt hangt af van het bekeken punt op het object. In figuur 4 is een schematische weergave hoe de werking van stress er uit ziet. Bij het punt van inslag wordt het object naar binnen gedrukt waardoor er sprake is van drukstress. Aan de weerzijde van het inslagpunt is er sprake van rekstress. Hier wordt het object uit elkaar getrokken. Aan de hand van het rode diagram aan de rechter zijde van figuur 4 is af te lezen op welke mate stress aanwezig is.



Figuur 4: Stress voorbeeld

2.3 Geconcentreerde stress

Geconcentreerde stress is een vorm van stressophoping. Als delen van een object niet kan worden bereikt door stress, zal de stress zich verplaatsen naar de nabije gebieden. Dit kan gebeuren omdat het object bijvoorbeeld verandering heeft op het oppervlak, zoals hoeken of randen.

2.3.1 Stress-concentratie factor

Om het principe van geconcentreerde stress duidelijk uit te leggen wordt er gebruik gemaakt van het voorbeeld in figuur 5. Hierin wordt gebruik gemaakt van een oneindig grote plaat, waarin een gat met stralen r en ρ zich bevindt. Er wordt aan twee overstaande zijdes van de plaat getrokken met een uniforme stress σ, wat met behulp van formule 1 wordt uitgerekend. Het gat in de plaat kan worden beschouwd als een zwak punt, omdat het een verandering op het oppervlak is. Hierdoor ontstaat er een ophoping aan stress rondom het gat. De zogeheten *stress-concentratie factor* K_t geeft het verschil weer tussen de uniforme stress over de plaat en de stress rondom het gat[2]:

$$K_t = \frac{\sigma}{\sigma_u} \tag{2}$$

waarin:

K_t	=	Theoretische stress-concentratie factor	$[-]$
σ	=	Stress rondom gat	$[\frac{N}{m^2}]$
σ_u	=	Uniforme stress	$[\frac{N}{m^2}]$

De stress-concentratie factor is afhankelijk van de vorm van de oneffenheid. In bijlage A staat beschreven hoe er gewerkt moet worden met verschillende vormen.
Op het punt P is er sprake van geconcentreerde stress, afkomstig van het cirkelvormige gat. In tabel II van bijlage A staat de wijze waarop gerekend moet worden in het geval van een cirkelvormig gat. Deze is op de volgende manier af te leiden[2]:

$$\sigma = \frac{1}{2}\sigma_u(1 + \frac{r^2}{\rho^2}) - \frac{1}{2}\sigma_u(1 + 3\frac{r^4}{\rho^4})\cos 2\theta \tag{3}$$

waarin:

r	=	Straal gat	$[m]$
ρ	=	Afstand tot midden gat	$[m]$
θ	=	Hoek	$[rad]$

Als punt P op de grens van het gat ligt, ofwel $r = \rho$, en aan de zijkanten van het gat, ofwel $\theta = \frac{1}{2}\pi$ of $\theta = \frac{3}{2}\pi$, dan is de theoretische stress-concentratie factor maximaal:

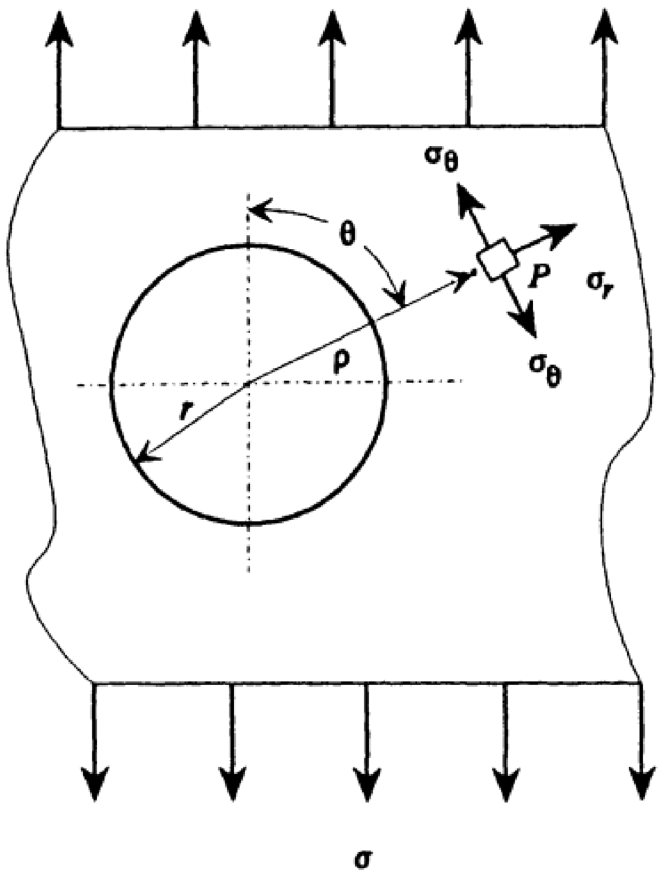
$$\sigma = \tfrac{1}{2}\sigma_u(1 + \tfrac{r^2}{\rho^2}) - \tfrac{1}{2}\sigma_u(1 + 3\tfrac{r^4}{\rho^4})\cos 2\theta$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\sigma_u(1+1) - \frac{1}{2}\sigma_u(1+3)\cdot -1 = 3\sigma_u \tag{4}$$

Naast de maximale stress is er ook een minimale stresspunt. Als $r = \rho$ geldt dan ligt het minimale stresspunt op $\theta = 0$ of $\theta = \pi$:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\sigma_u(1+\tfrac{r^2}{\rho^2}) - \tfrac{1}{2}\sigma_u(1+3\tfrac{r^4}{\rho^4})\cos 2\theta$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\sigma_u(1+1) - \frac{1}{2}\sigma_u(1+3)\cdot 1 = -\sigma_u \tag{5}$$

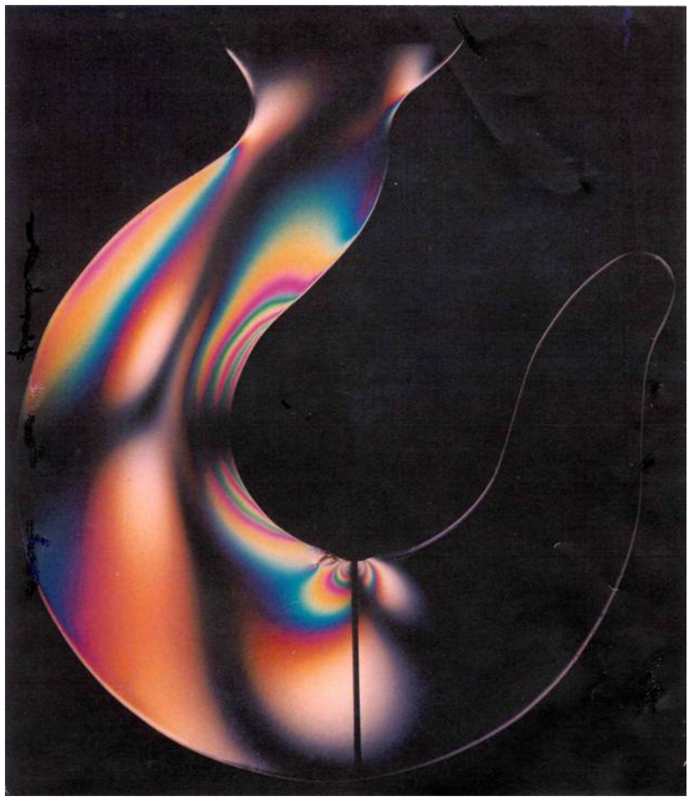


Figuur 5: Voorbeeld van geconcentreerde stress. Zichtbaar is een oneindig grote plaat met een circulair gat, met de stralen r en ρ. Er wordt aan de plaat getrokken met stress σ[2]

2.3.2 Foto-elasticiteit

Foto-elasticiteit is gebaseerd op het principe dat de brekingsindex binnen een materiaal veranderd als er stress op wordt uitgeoefend.

Foto-elasticiteit weergeeft de gebieden waarin de brekingsindex verschilt. In figuur 6 is een voorbeeld van foto-elasticiteit te zien. Er wordt getrokken aan de bovenkant van de haak, maar tegengehouden aan de onderkant met behulp van een stevige draad. Hierdoor ondervindt de haak stress, voornamelijk in het gebied rondom de draad. Voor de volledige theorie achter foto-elasticiteit, zie bron [3].



Figuur 6: Voorbeeld van foto-elasticiteit. Aan de bovenkant wordt er aan de haak getrokken, maar het wordt tegengehouden in het middenstuk. Duidelijke kleurveranderingen zijn waarneembaar, voornamelijk in het middenstuk

2.4 Stress intensiteit

Tijdens de eerste wereldoorlog was er veel vraag naar onderzoek in de richting van materiaalkunde. Hier is door meerdere wetenschappers onderzoek naar gedaan wanneer een materiaal/object breekt. A.A. Griffith en G.R. Irwin waren een van de grondleggers op het gebied van 'fracture mechanics', ofwel breukmechanica. Deze onderzoekers hebben de werking achter zogeheten *stress intensiteit* onderzocht. Stress intensiteit beschrijft de werking achter stress dat wordt uitgeoefend op objecten met een breuk.

2.4.1 Theorie van Griffith

A.A. Griffith onderzocht de energie-balans bij een breuk. De rek-energie per volume-eenheid is gelijk aan[5]:

$$U^* = \frac{1}{V}\int F dx = \int \frac{F}{A}\frac{dx}{L} = \int \sigma d\epsilon \tag{6}$$

waarin:

U^*	=	Rek-energie per volume-eenheid	$[\frac{J}{m^3}]$
V	=	Volume	$[m^3]$
F	=	Kracht	$[N]$
A	=	Oppervlak	$[m^2]$
L	=	Lengte	$[m]$
σ	=	Stress	$[\frac{N}{m^2}]$
ϵ	=	Rek	$[-]$

Als het materiaal bros is (oftewel, $\sigma = E\epsilon$ geldt altijd), dan geldt het volgende:

$$U^* = \frac{E\epsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \tag{7}$$

waarin:

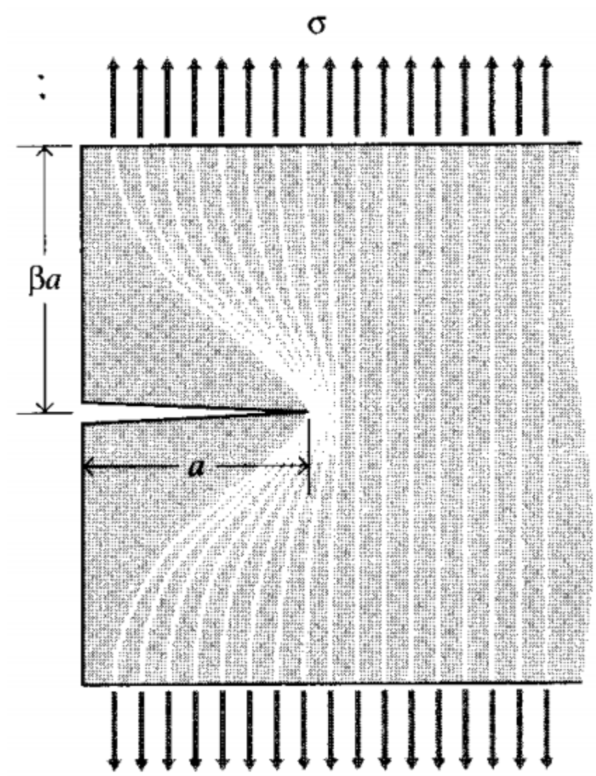
E	=	Young's modulus	$[\frac{N}{m^2}]$

Als er een breuk met grootte a in de zijkant van een plaat zich bevindt, zullen twee driehoekvormige gebieden naast de breuk zich verlossen van de rek-energie. Deze gebieden hebben een breedte a en lengte βa (zie figuur 7). Deze lengte-parameter β wordt zo gekozen dat het voldoet aan de Inglis-theorie[4], waaruit volgt dat $\beta = \pi$. De totale rek-energie per lengte-eenheid die vrijkomt is gelijk aan het product van de rek-energie per volume-eenheid en de oppervlakte van de twee driehoekige gebieden naast de breuk:

$$U = \frac{\sigma^2}{2E}\pi a^2 \tag{8}$$

waarin:

U	=	Rek-energie per lengte-eenheid	$[\frac{J}{m}]$



Figuur 7: Schematische weergave van de driehoekvormige gebieden naast de scheur, waar rek-energie vrijkomt[5]

De oppervlakte energie per lengte-eenheid S behorend bij breuklengte a is gelijk aan:

$$S = 2\gamma a \tag{9}$$

waarin:

S	=	Oppervlakte energie per lengte-eenheid	$[\frac{J}{m}]$
γ	=	Oppervlakte energie	$[\frac{J}{m^2}]$

De totale energie behorend bij breuklengte a is gelijk aan de balans tussen de oppervlakte energie en de vrijgekomen energie, oftewel $S - U$.

Zolang de stress wordt verhoogd zal de lengte van de breuk steeds groter worden. Als de lengte van de breuk groter wordt, zal de vrijgekomen energie U kwadratisch toenemen en de oppervlakte energie evenredig toenemen. In eerste instantie zal de totale energie positief toenemen, totdat de vrijgekomen rek-energie uiteindelijk meer toeneemt per breuklengte dan de oppervlakte spanning zal. Het keerpunt waar de totale energie begint af te nemen neemt plaats wanneer de breuklengte een kritieke waarde heeft bereikt, ofwel de kritieke breuklengte a_c. Deze waarde is te vinden door te zoeken naar extreme waarden[5][6]:

$$\frac{d(S-U)}{da} = 0$$

$$\frac{dS}{da} - \frac{dU}{da} = 2\gamma - \frac{\sigma_t^2}{E}\pi a = 0 \tag{10}$$

Omgeschreven levert dit het volgende op:

$$2\gamma = \frac{\sigma_t^2}{E}\pi a$$

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi a}} \tag{11}$$

2.4.2 Theorie van Irwin

Het nadeel van de theorie van Griffith is dat er wordt vereist dat het materiaal bros is(oftewel, $\sigma = E\epsilon$ geldt altijd). Dit is zeker niet altijd het geval en is dus ook het zwakke punt van de theorie.
Uit onderzoek van G.R. Irwin en de U.S. Naval Research Laboratory (NRL) blijkt dat de vrijgekomen rek-energie bij ductiele materialen niet overeenkomt met de 2γ uit de theorie van Griffith, maar met de plastische dissipatie G_p van het materiaal[6][7]. Zo is Irwin tot de volgende vergelijking gekomen:

$$G = 2\gamma + G_0 \tag{12}$$

waarin:

G	=	Vrijgekomen energie	$[\frac{J}{m^2}]$
γ	=	Oppervlakte energie	$[\frac{J}{m^2}]$
G_p	=	Plastische dissipatie	$[\frac{J}{m^2}]$

Zo heeft het brosse materiaal glas $G \approx 2\gamma = 2[\frac{J}{m^2}]$, terwijl het ductiele materiaal staal $G \approx G_p = 1000[\frac{J}{m^2}]$ heeft. Hierdoor wordt in plaats van formule (11) het volgende gebruikt[5][6][7][8]:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{GE}{\pi a}} \tag{13}$$

2.4.3 Stress intensiteit factor

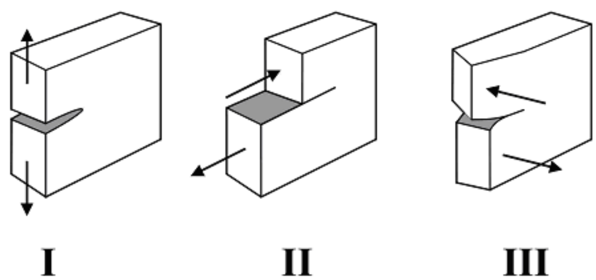
Zoals vermeld in hoofdstuk 2.4.1 deed Griffith onderzoek naar energiebalans tijdens breuken. Uit het onderzoek is gebleken dat de uitkomst van het product van de treksterkte en de wortel uit de breuklengte constant blijft. Griffith noemde deze constante als de *stress-intensiteit factor*, die als het volgende werd beschreven[9][8]:

$$K_I = Y\sigma\sqrt{a\pi} \tag{14}$$

waarin:

K_I	=	Stress intensiteit factor	$[\frac{N}{m^2}\sqrt{m}]$
Y	=	Vormfactor	$[-]$

De vormfactor in formule (14) zijn afhankelijk van de vorm van de breuk. Bij een circulaire breuk op de oppervlakte van een plaat is de vormfactor gelijk aan $Y = 2$, terwijl bij een rechte breuk aan de zijkant van een plaat geldt een vormfactor gelijk aan $Y = 1,12$. In bijlage B is een overzicht te vinden met alle vormfactoren.



Figuur 8: Modi van scheuren; dit is cruciaal voor de stress-intensiteit factor

Een scheur kan op drie verschillende manieren ontstaan. Deze manieren worden ook wel mode I tot en met III genoemd. Per mode wordt er in een verschillende richting aan het object getrokken. In mode I wordt er in de y-richting stress uitgeoefend, in mode II in de x-richting en in mode III in de z-richting. In formulevorm geldt het volgende:[10]:

$$K_I = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r}\sigma_{yy}(r, 0) \tag{15}$$

$$K_{II} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r}\sigma_{yx}(r, 0) \tag{16}$$

$$K_{III} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r}\sigma_{yz}(r, 0) \tag{17}$$

Zodra deze stress-intensiteit factor een kritische waarde bereikt (K_{IC}) zal het object breken.

2.5 Verschil tussen concentratie en intensiteit

In de vorige twee hoofdstukken is er gesproken over stress concentratie en stress intensiteit. Beide onderwerpen beschrijven de werking van stress in een object met vervormingen. Stress concentratie werkt met objecten waarin de vorm anders is en stress intensiteit werkt met objecten waar een breuk in zit. Om hierin een duidelijk onderscheidt te maken wordt een duidelijke richtlijn gesteld wanneer welke vorm van stress ophoping voorkomt.
Uit praktijk ervaring blijkt dat stress intensiteit vindt plaats zodra de lengte van de breuk a vele malen groter is dan de dikte van de breuk b, waardoor de straal van de breuk minimaal wordt[11].

2.6 Materiaalsterkte

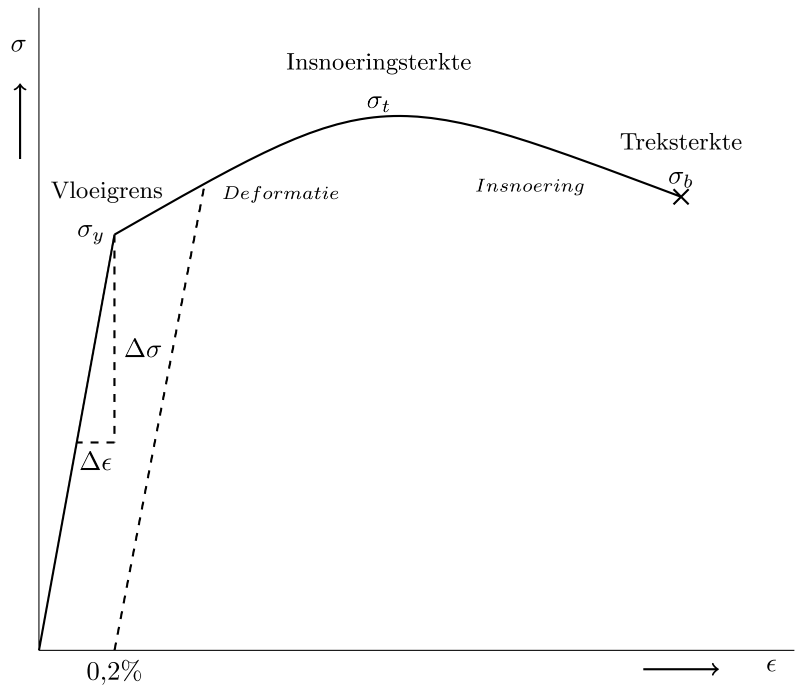
Bij destructability wordt er gekeken naar de stress van een botsing. Komt de geleverde stress boven een drempelwaarde, dan zal het object deformeren en/of breken. In dit hoofdstuk wordt er gekeken naar de hoeveelheid stress die nodig is om het object te deformeren en/of te laten breken.

Elk materiaal heeft een of meerdere specifieke stress drempelwaardes. Brosse materialen (bijvoorbeeld glas, keramiek en ijzer) hebben een enkele materiaaleigenschap, namelijk de *treksterkte* σ_t. De treksterkte is een stress drempelwaarde, wat weergeeft hoeveel stress het object aan kan voordat het breekt. De treksterkte kan variëren van <10 MPa tot >5000 MPa, afhankelijk per materiaal.
Ductiele materialen hebben twee extra materiaaleigenschappen, namelijk de *vloeigrens* σ_y en de *insnoeringsgrens* σ_n. De vloeigrens geeft de stress weer die het object aan kan voordat het deformeert. De insnoeringsgrens geeft de stress weer voordat een object insnoering vertoond.

In figuur 9 is duidelijk te zien hoe de σ over ϵ -curve verloopt voor een ductiel materiaal. Hierbij is het cruciaal om te merken dat het materiaal eerst vervormd, dan insnoert en vervolgens breekt.

2.6.1 Treksterkte

De treksterkte σ_t is een cruciale drempelwaarde. Dit definieert de benodigde stress voordat het object in meerdere stukken breekt. Voor brosse materialen is dit de enige stress-drempelwaarde die van belang is, maar voor ductiele materialen is dit de 3^e en laatste drempelwaarde.
Net zoals de andere drempelwaardes is de treksterkte gedefinieerd als een stresswaarde in $\frac{N}{m^2}$ of Pa. Als een object geraakt wordt met een stress groter dan de treksterkte zal het breekproces beginnen (in hoofdstuk 2.7 zal verder over het breekproces gesproken worden).



Figuur 9: σ over ϵ -curve voor een ductiel materiaal

2.6.2 Vloeigrens

Deformatie kan alleen ontstaan bij ductiele materialen. Deformatie ontstaat voordat het proces van insnoering begint. Zodra het ductiele materiaal genoeg wordt uitgerekt vervormt het materiaal, waardoor de dikte van het materiaal afneemt en toeneemt in de lengte. De verandering van vorm is uit te rekenen met de volgende formule[1, p. 13]:

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l} = \frac{\Delta l}{l} \tag{18}$$

waarin:

ϵ	=	Rek	$[-]$
l	=	Lengte	$[m]$
l_0	=	Oorspronkelijke lengte	$[m]$

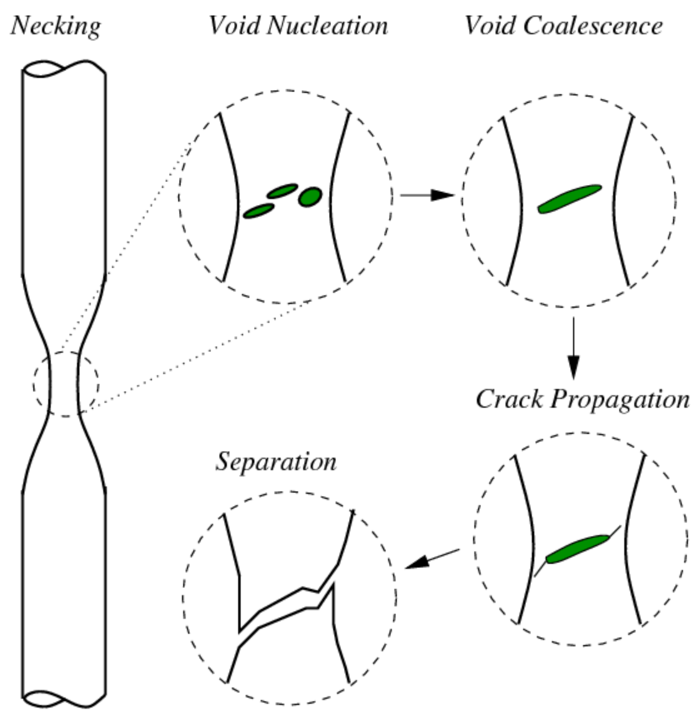
Zodra de stress op het object de vloeigrens overschrijdt gaat het object deformeren. Als een object deformeert verandert de originele vorm van het object. Als er aan het object getrokken wordt, dan zal het uitrekken; de lengte neemt toe, terwijl de dikte afneemt. Compressie van het object zorgt voor het tegengestelde; de dikte neemt toe terwijl de lengte van het object afneemt.

Zodra de vloeigrens σ_y wordt overschreden geldt de wet van Hook[1, p. 15] niet meer. Dit houdt in dat de richtingscoëfficiënt van de σ over ϵ -curve niet meer gelijk is aan de Young's Modulus. Als het object wordt uitgerekt ondergaat het object het zogenaamde proces van *yielding*.

De deformatie is permanent zodra de rek de 0,2% grens overschrijdt[1, p. 17]. Dit houdt in dat de deformatie onomkeerbaar is.

2.6.3 Insnoeringgrens

Enkele ductiele materialen ondervinden ook het proces van insnoering. Dit houdt in dat de middensectie van het object sterk begint te vervormen, waar het object extreem zwak wordt. Dit proces begint vlak voordat het breekpunt wordt benadert en geeft aan dat het object sterk vervormt is.
Insnoering ontstaat door microscopische scheuren in de middensectie van het object. Zodra meerdere van deze scheuren in de nabijheid van elkaar gevormd worden ontstaat er een kettingreactie tussen deze scheuren. Door meer stress uit te oefenen op het object zullen de scheuren tot een grote scheur vormen en vervolgens het object laten breken. In figuur 10 is een duidelijke schematische weergave over het insnoeringsproces.



Figuur 10: Schematische weergave van het insnoeringsproces

2.7 Breekproces

Een object begint met breken zodra een punt op het oppervlak geraakt wordt met een stress dat groter is dan de treksterkte van het punt. Deze treksterkte is afhankelijk van de positie op het object, waarin geconcentreerde stress (hoofdstuk 2.3) een grote rol bij speelt. Het is dan ook vaak het geval dat de eerste scheuren ontstaan rond oneffenheden in het object, of waar al kleine scheuren zich bevinden en verder doorscheuren. Naarmate scheuren groter worden zal de geconcentreerde stress zich verplaatsen en zal bij andere punten verhoogde stress bevinden, wat er voor zorgt dat de treksterkte eerder wordt behaald. Dit is ook de reden waarom scheuren vaak *doorscheuren*.

2.7.1 Bepaling van de scheurlijnen

Zodra het object is geraakt met een stress groter dan de treksterkte ontstaan er scheurlijnen rondom het inslagpunt. Deze scheurlijnen ontstaan langs de plekken waar de geleverde stress het eerste de treksterkte bereiken. Dit gebeurt op plekken waar er een lokale verzwakking waardoor effecten zoals stress concentratie/intensiteit er voor zorgen dat er meer stress wordt uitgeoefend. Deze lokale verzwakkingen kunnen liggen aan kleine scheuren/gaten in het object of aan verschillende materialen in het object. Een goed voorbeeld is een bakstenen muur met voegen; de voegen zullen eerder breken omdat dit zwakker is dan de bakstenen. Dit is zichtbaar in figuur 11.

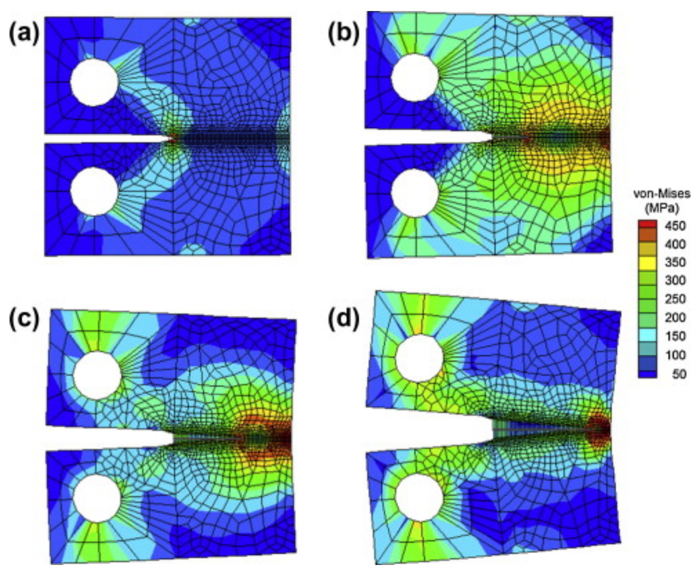
Figuur 11: Een bakstenen muur met meerdere breuken. Opvallend is dat de meeste breuken langs de voegen van de muur lopen

3 Simulaties

Zoals verteld is in hoofdstuk 1.4 zit er een groot verschil tussen de theoretische werking van destructability en de toepassing in simulaties. In dit hoofdstuk zal verteld worden over de manier op hoe simulaties werken en over de Havok engine, die TNO gebruikt om mee te simuleren.

3.1 Finite Element Method

Om destructability juist te simuleren kan er gebruik gemaakt worden van de finite element method. De finite element method is een manier waarop gesimuleerd kan worden, waarbij gepoogd wordt zo realistisch mogelijk te simuleren.
De finite element method kan worden gebruikt om de stress uit te rekenen over een object (zie figuur 12). Met de finite element method wordt een object beschouwd als een groot aantal deeltjes, waarbij er per deeltje de stress wordt uitgerekend. De reden dat er een maximum aan het aantal deeltjes zit is omdat het simuleren van een oneindig aantal deeltjes onmogelijk is. Wel kan het aantal deeltjes extreem hoog gemaakt worden, maar dit vereist wel extra bereken-iteraties.



Figuur 12: Voorbeeld van een finite element analyse[12]

3.2 Havok Software

Havok, gemaakt door Intel, is een bekende game engine die gebruikt wordt om natuurkundige elementen toe te voegen aan virtuele omgevingen. TNO heeft gekozen om te werken met de Havok engine. Havok gebruikt vele natuurkundige principes in onder andere de onderdelen *Physics* en *Destruction*. Physics genereert mechanische elementen op objecten zoals zwaartekracht, impuls en dergelijk bekende begrippen in de natuurkunde. Een groot deel van het onderzoek is gebaseerd op de software van Havok.

3.2.1 Physics

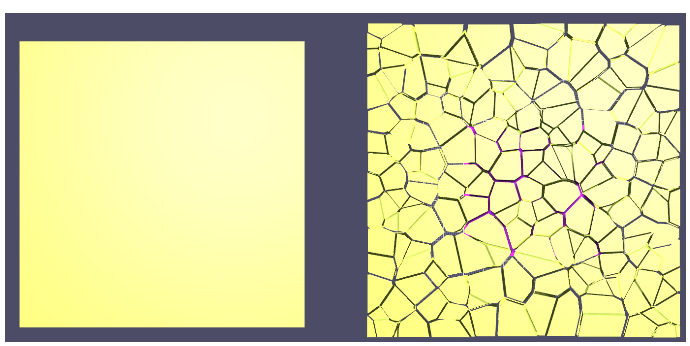
Het onderdeel Physics van de Havok engine zorgt ervoor dat mechanische natuurkundige principes kunnen worden toegepast in een virtuele omgeving.

3.2.2 Destruction

Het onderdeel Destruction van de Havok engine is een toevoeging op het onderdeel Physics. Destruction zorgt ervoor dat er destructability kan plaatsvinden bij objecten. Dit zorgt ervoor dat Physics het object kan vernietigen, ofwel uit elkaar halen.

Wat voegt Havok Destruction toe?

Havok Destruction is een uitbreiding op het Physics onderdeel van Havok. Het voegt breuken aan objecten toe, plus de natuurkundige aspecten rondom de breuk van een object [13, p. 6].
Havok Destruction deelt een object op in twee componenten : een *breakable shape* en een *breakable body*. Een breakable shape heeft alle numerieke informatie over het object. Dit houdt in dat het beginmodel bekent is, maar ook het breuklijnen model. Ook heeft de breakable shape informatie over de relaties tussen de verschillende (losse) onderdelen van het object zodra het breekt. Een voorbeeld van een breuklijnenmodel is te zien in figuur 13.



Figuur 13: Glazen plaat aan de linker kant. Breuklijnen model aan de rechterkant

Een breakable body onthoudt de rest van de object informatie. De breakable beschikt over de *graphics body* en de *physics body*. De graphics body bevat het uiterlijk van het object en de physics body bevat de fysische eigenschappen van het object.

Er zijn vier manieren om een object te maken dat destructability aankan in de Havok Destruction Engine:

1. Het gehele object wordt handmatig ontworpen, inclusief het gebroken object (breuklijnen model).
2. De automatische *fracture* functie wordt gebruikt na het modelleren. De data hiervan wordt opgeslagen in het model bestand.
3. De automatische *fracture* functie wordt gebruikt tijdens het modelleren. Het resultaat van het gebroken object kan vervolgens handmatig worden aangepast door de ontwerper mocht daar behoefte aan zijn.
4. Tijdens de simulatie wordt berekent hoe het object uit elkaar valt.

De laatste mogelijkheid heeft als nadeel dat het extra rekenvermogen kost, wat nadelig uit kan pakken op de prestaties van de simulatie[13, p. 20].

Werking van Havok Destruction

Havok Destruction werkt in nauw verband met de physics engine van Havok. Bij de physics engine moet worden vastgelegd welke objecten de natuurkundige wetten moeten ondergaan. Deze moeten geconverteerd worden naar zogeheten *Rigid bodies*. Hiermee wordt er een massa, wrijvingscoëfficiënt en een restitutiecoëfficiënt toegekend. Deze parameters zijn relevant om op een realistische wijze zwaartekracht en wrijving te simuleren. Om een object breekbaar te maken moet het van een rigid body geconverteerd worden naar een *breakable body*. Hierbij worden de volgende parameters toegekend:

- Strength $[\frac{kg \cdot m}{s}]$
- Elasticity $[Pa]$
- Subpiece strength $[\frac{kg \cdot m}{s}]$
- Connectivity $[-]$
- Destruction radius $[m]$

De parameter *strength* geeft de grootte weer van de impuls dat het object kan opvangen. Als de opgevangen impuls groter is dan *strength*, dan breekt het object. *Elasticity* (elasticiteit) geeft de elasticiteitsmodulus (Young's modulus) E weer. *Subpiece strength* is de sterkte die de onderdelen van een object bij elkaar houdt. Zodra er een impuls op een onderdeel wordt uitgeoefend dat groter is dan de subpiece strength, dan ontstaat er een breuk tussen twee onderdelen.

Deze subpiece strength wordt toegepast afhankelijk van de connectivity. *Connectivity* is de manier waarop de onderdelen van het object zich hechten aan de andere onderdelen. Dit is te onderscheiden in 4 verschillende varianten:

1. CONNECTIVITY_FULL: elk onderdeel van het object zit met sterkte *subpiece strength* aan elkaar gebonden.

2. CONNECTIVITY_PARTIAL: elk onderdeel van het object zit alleen met de meest dichtstbijzijnde onderdelen verbonden met sterkte *subpiece strength*.

3. CONNECTIVITY_NONE: de onderdelen van het object zitten niet aan elkaar verbonden.

4. CONNECTIVITY_INHERITED: elk onderdeel neemt de connectivity-eigenschap van het vorige object over. Dit kan gebruikt worden als er meerdere objecten gebruikt worden in de simulatie.

In figuur 14 en 15 zijn respectievelijk de connectivity van CONNECTIVITY_NONE en CONNECTIVITY_FULL te zien.

Figuur 14: Gebroken tafel met CONNECTIVITY_NONE

Destruction radius geeft weer hoeveel ruimte er moet komen tussen gebroken onderdelen. Dit is alleen om het eindresultaat visueel aantrekkelijker te maken en zal dus niet aangepast worden voor dit onderzoek[13].

Figuur 15: Gebroken tafel met CONNECTIVITY_FULL

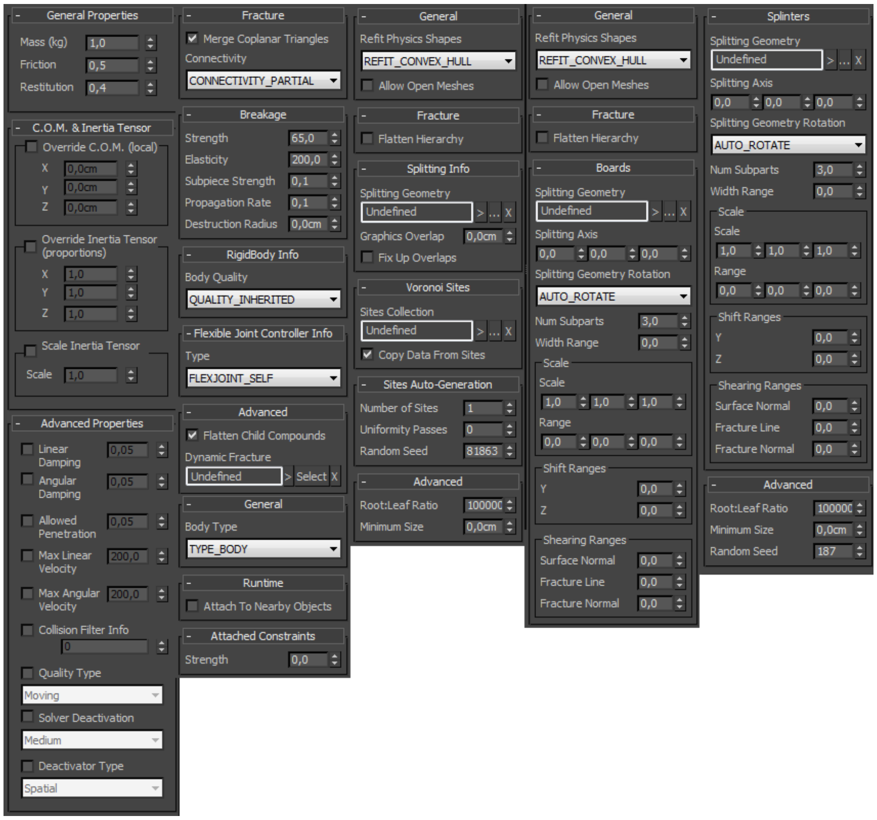
4 Resultaten

Uit TNO is er gevraagd om destructability te realiseren en dat vervolgens op een zo eenvoudig mogelijke manier te implementeren in het ontwerpproces van een artiest. Dit betekent dat het toevoegen van destructability zo eenvoudig en probleemloos mogelijk moet verlopen. Aan de hand van een onderzoek (zie bijlage C) is er gekozen voor Havok Destruction. Havok Destruction kan met behulp van een 3D-modelleer programma (in dit geval 3DS Studio Max) gemakkelijk objecten vernietigbaar maken, ofwel destructability toevoegen. Havok Destruction biedt meerdere variabelen aan om de destructability aan te passen naar behoren. Het nadeel hier mee is, is dat het vaak lastig is voor de artiest om te bepalen wat de juiste variabelen zijn om mee te werken. Om deze zo goed mogelijk in te stellen maar tegelijkertijd het zo eenvoudig mogelijk te houden is er gekozen om een plug-in te schrijven die automatisch de variabelen toekent in 3DS Studio Max.

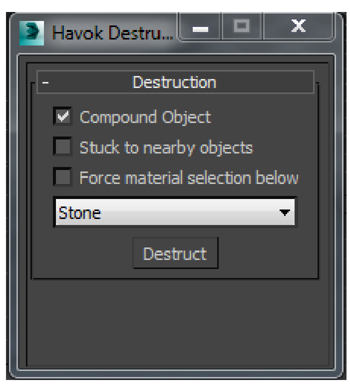
4.1 Plug-in

In Havok Destruction is destructability in te stellen met behulp van variabelen. In figuur 16 zijn alle beschikbare variabelen van Havok Destruction zichtbaar. Dit zijn veel variabelen om per object in te stellen. Om dit proces te vereenvoudigen is er een plug-in gemaakt (zie figuur 17) die gebruiksvriendelijker werkt dan om met alle Havok Destruction variabelen handmatig te werken. De plug-in om het destructability-proces met Havok Destruction te versoepelen is gemaakt in 3DS Studio Max, met de daar-in-gebouwde taal *Maxscript*.

Havok Destruction stelt als eis dat er een type breuk gekozen moet worden.



Figuur 16: Overzicht van de variabelen die Havok Destruction aanbiedt

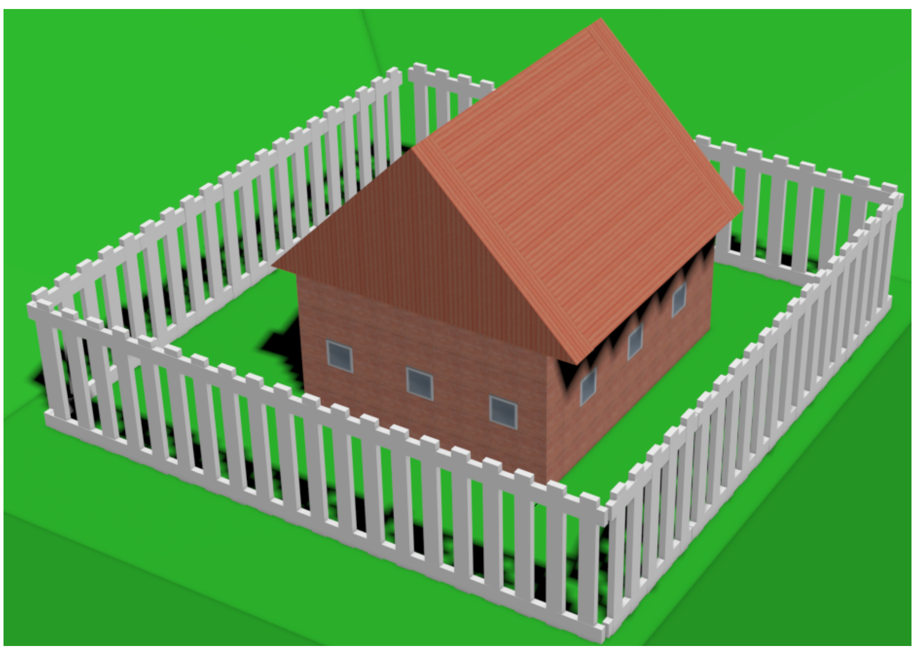


Figuur 17: Interface van de automatisering plug-in

Om dit zo makkelijk mogelijk te maken wordt als basisbreuk de Voronoi-breuk gebruikt, en eventueel wordt er een hout-breuk toegevoegd (bijvoorbeeld bij

hout of glas). Bij de Voronoi-breuk wordt gevraagd naar een aantal punten om de Voronoi functie op te baseren. Deze punten worden random verdeelt over het volume van het object. Het aantal punten hangt af van de volume van het object, met een maximum dat van tevoren wordt ingesteld.
Vervolgens wordt de sterkte van het materiaal ingesteld. Deze is afhankelijk van het gebruikte materiaal en de massa van het object. Havok werkt met een sterkte-eenheid die niet overeenkomt met de theorie. De eenheid $[\frac{kg \cdot m}{s}]$ wordt gebruikt in plaats van $[\frac{N}{m^2}]$, waardoor er een dimensieverschil in zit van $[\frac{s}{m^2}]$[13]. Hierdoor kunnen geen letterlijke literatuurwaarden gebruikt worden, maar kan er wel een goede schatting gemaakt worden. Uit experimenten blijkt dat de materiaalsterkte toegekend in Havok Destruction evenredig toeneemt met de massa van het object.

Om deze methode uit te testen is er een voorbeeld gemaakt waarin een huis, gemaakt van hout, steen en glas, bekogelt wordt door ronde kogels met verschillende massa's. Hierin wordt duidelijk dat een kleine kogel met relatief weinig massa ten opzichte van de eigen massa weinig schade veroorzaakt, terwijl een kogel met een veel grotere massa makkelijk het huisje laat breken. In figuur 18 is het huis zichtbaar dat wordt gebruikt bij de voorbeeldsimulatie. De testsimulatie is bijgeleverd in de digitale bijlage.



Figuur 18: Testhuis met verschillende materialen

5 Conclusie

Er is duidelijk gemaakt wat er nodig is om een realistische simulatie te creëeren. Wat hierbij cruciaal is om te bepalen waar de nadruk op gelegd moet worden: visueel spectaculair en snel, of fysisch correct en langzaam. Vanuit TNO is er gevraagd naar de eerste optie, het visuele aspect van destructability. Havok Destruction genereert goede resultaten op het visuele gebied en lijkt snel te werken.
Wat duidelijk is is dat Havok Destruction geen realistische simulaties maakt. Het gebruikt eenheden van $[\frac{kg \cdot m}{s}]$ terwijl $[\frac{N}{m^2}]$ volgens de theorie gebruikt zou moeten worden. Daarnaast bevat Havok Destruction ook een random factor, wat niet realistisch is. Wel moet er worden toegegeven dat de werkelijke realiteit bijna onmogelijk is om perfect te simuleren. Daarom moet er een afweging worden gemaakt tot welke mate het belang is om zo realistisch mogelijk te werken.

De plug-in die gemaakt is om het gebruik van Havok Destruction te versimpelen werkt succesvol. Het vermindert het aantal variabelen van 45 uit de standaard manier van werken naar 3 variabelen. Dit scheelt een hoop tijd voor de artiest om dit handmatig in te vullen.

5.1 Toekomst

Onder ideale omstandigheden zou de simulatie overeenkomen met de theorie. De finite element method zorgt er al voor dat dit de goede richting opgaat, alhoewel perfectie daar niet haalbaar mee is. Dit komt omdat met de finite element method een limiet wordt gesteld aan het aantal te simuleren deeltjes en dus niet een oneindig aantal deeltjes kan simuleren. Wel zijn er een aantal punten te verbeteren aan Havok Destruction:

- Werken met juiste eenheden; strength zou overeen moeten komen met de treksterkte van het materiaal.
- Werkwijze zou verbeterd moeten worden; exporteren via 3DS Studio Max is niet handig.
- Er zou gekeken moeten worden naar de stress dat wordt uitgeoefend, niet naar de impuls.

Dit zullen veel veranderingen zijn binnen de werkwijze van Havok Destruction. Als er voldoende tijd beschikbaar is zal het waarschijnlijk praktischer zijn om eigen software te schrijven dat wel fysisch correct destructability simuleert.

Referenties

[1] R. E. Hummel, *Understanding Material Science.* Springer-Verlag, 2004.

[2] E. Gutierrez-Miravete, "Stress concentration," 2012.

[3] J. W. Phillips, "Photoelasticity,"

[4] C. E. Inglis, "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners,"

[5] D. Roylance, "Introduction to fracture mechanics," 2001.

[6] Z.-H. J. Chin-Teh Sun, *Fracture Mechanics.* Elsevier Inc., 2012.

[7] G. R. Irwin, "Fracture dynamics," *Fracturing of metals*, vol. 147, p. 166, 1948.

[8] S. University, "Griffith theory of brittle fracture."

[9] T. Anderson, *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications.* 3 ed., 2005.

[10] D. Rooke, D. Cartwright, and G. B. M. of Defence. Procurement Executive, *Compendium of Stress Intensity Factors.* Stationery Office, 1976.

[11] D. Grieve, "Stress concentration," April 2008.

[12] P. Broumand and A. Khoei, "The extended finite element method for large deformation ductile fracture problems with a non-local damage-plasticity model," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 112113, no. 0, pp. 97 – 125, 2013.

[13] Intel, *Havok Destruction Manual*, 2012.

A Stress-concentratie factoren

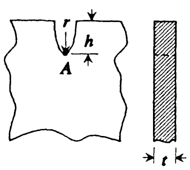
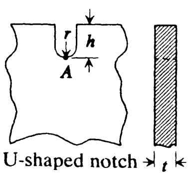
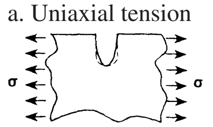
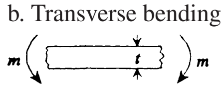
TABLE 6-1 STRESS CONCENTRATION FACTORS[a]

Notation

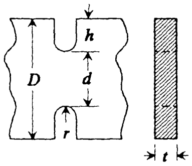
K_t	Theoretical stress concentration factor in elastic range	σ_{nom}	Nominal normal stress defined for each case (F/L^2)
σ	Applied stress (F/L^2)	σ_{max}	Maximum normal stress at stress raiser (F/L^2)
P	Applied axial force (F)	τ_{nom}	Nominal shear stress defined for each case (F/L^2)
M	Applied moment (FL)		
m_1, m_2, m	Applied moment per unit length (FL/L)	τ_{max}	Maximum shear stress at stress raiser (F/L^2)
T	Applied torque (FL)		

Refer to figures for the geometries of the specimens.

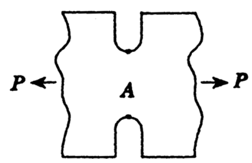
I. Notches and Grooves

Type of Stress Raiser	Loading Condition	Stress Concentration Factor
1. Elliptical or U-shaped notch in semi-infinite plate  Elliptical notch  U-shaped notch	a. Uniaxial tension 	$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t\sigma$ $K_t = 0.855 + 2.21\sqrt{h/r}$ for $1 \le h/r \le 361$
	b. Transverse bending 	Elliptical notch only, $\nu = 0.3$ and when $h/t \to \infty$, $\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t\sigma, \sigma = 6m/t^2$ $K_t = 0.998 + 0.790\sqrt{h/r}$ for $0 \le h/r \le 7$

2.
Opposite single U-shaped notches in finite-width plate



a. Axial tension



$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = P/td$

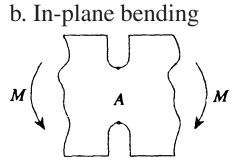
$$K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

	$0.1 \le h/r < 2.0$	$2.0 \le h/r \le 50.0$
C_1	$0.955 + 2.169\sqrt{h/r} - 0.081h/r$	$1.037 + 1.991\sqrt{h/r} + 0.002h/r$
C_2	$-1.557 - 4.046\sqrt{h/r} + 1.032h/r$	$-1.886 - 2.181\sqrt{h/r} - 0.048h/r$
C_3	$4.013 + 0.424\sqrt{h/r} - 0.748h/r$	$0.649 + 1.086\sqrt{h/r} + 0.142h/r$
C_4	$-2.461 + 1.538\sqrt{h/r} - 0.236h/r$	$1.218 - 0.922\sqrt{h/r} - 0.086h/r$

for semicircular notch ($h/r = 1.0$)

$$K_t = 3.065 - 3.472\left(\frac{2h}{D}\right) + 1.009\left(\frac{2h}{D}\right)^2 + 0.405\left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

b. In-plane bending



$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = 6M/d^2 t$

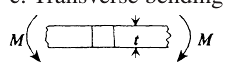
$$K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

	$0.1 \le h/r < 2.0$	$2.0 \le h/r \le 50.0$
C_1	$1.024 + 2.092\sqrt{h/r} - 0.051h/r$	$1.113 + 1.957\sqrt{h/r}$
C_2	$-0.630 - 7.194\sqrt{h/r} + 1.288h/r$	$-2.579 - 4.017\sqrt{h/r} - 0.013h/r$
C_3	$2.117 + 8.574\sqrt{h/r} - 2.160h/r$	$4.100 + 3.922\sqrt{h/r} + 0.083h/r$
C_4	$-1.420 - 3.494\sqrt{h/r} + 0.932h/r$	$-1.528 - 1.893\sqrt{h/r} - 0.066h/r$

for semicircular notch ($h/r = 1.0$)

$$K_t = 3.065 - 6.637\left(\frac{2h}{D}\right) + 8.229\left(\frac{2h}{D}\right)^2 - 3.636\left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Notches and Grooves

<table>
<tr>
<td></td>
<td>c. Transverse bending

</td>
<td>

$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = 6M/t^2 d$

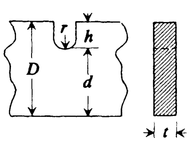
$K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$

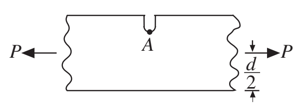
<table>
<tr><th></th><th>$0.1 \le h/r \le 5.0$ and h/t is large</th></tr>
<tr><td>C_1</td><td>$1.041 + 0.839\sqrt{h/r} + 0.014\, h/r$</td></tr>
<tr><td>C_2</td><td>$-1.239 - 1.663\sqrt{h/r} + 0.118\, h/r$</td></tr>
<tr><td>C_3</td><td>$3.370 - 0.758\sqrt{h/r} + 0.434\, h/r$</td></tr>
<tr><td>C_4</td><td>$-2.162 + 1.582\sqrt{h/r} - 0.606\, h/r$</td></tr>
</table>

for semicircular notch ($h/r = 1.0$)

$K_t = 1.894 - 2.784\left(\frac{2h}{D}\right) + 3.046\left(\frac{2h}{D}\right)^2 - 1.186\left(\frac{2h}{D}\right)^3$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

3.
Single U-shaped notch on one side in finite-width plate


</td>
<td>a. Axial tension

</td>
<td>

$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = P/td$

$K_t = C_1 + C_2\left(\frac{h}{D}\right) + C_3\left(\frac{h}{D}\right)^2 + C_4\left(\frac{h}{D}\right)^3$

<table>
<tr><th></th><th>$0.5 \le h/r < 2.0$</th><th>$2.0 \le h/r \le 20.0$</th></tr>
<tr><td>C_1</td><td>$0.907 + 2.125\sqrt{h/r} + 0.023h/r$</td><td>$0.953 + 2.136\sqrt{h/r} - 0.005h/r$</td></tr>
<tr><td>C_2</td><td>$0.710 - 11.289\sqrt{h/r} + 1.708h/r$</td><td>$-3.255 - 6.281\sqrt{h/r} + 0.068h/r$</td></tr>
<tr><td>C_3</td><td>$-0.672 + 18.754\sqrt{h/r} - 4.046h/r$</td><td>$8.203 + 6.893\sqrt{h/r} + 0.064h/r$</td></tr>
<tr><td>C_4</td><td>$0.175 - 9.759\sqrt{h/r} + 2.365h/r$</td><td>$-4.851 - 2.793\sqrt{h/r} - 0.128h/r$</td></tr>
</table>

for semicircular notch ($h/r = 1.0$)

$K_t = 3.065 - 8.871\left(\frac{h}{D}\right) + 14.036\left(\frac{h}{D}\right)^2 - 7.219\left(\frac{h}{D}\right)^3$

</td>
</tr>
</table>

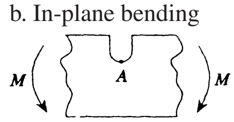
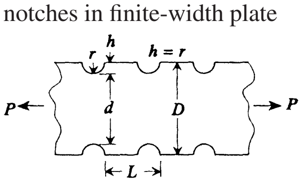
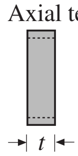
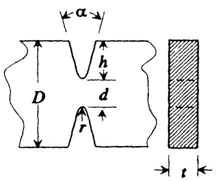
	b. In-plane bending 	$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = 6M/td^2$ $K_t = C_1 + C_2\left(\frac{h}{D}\right) + C_3\left(\frac{h}{D}\right)^2 + C_4\left(\frac{h}{D}\right)^3$ $\begin{array}{c\|c\|c} & 0.5 \le h/r \le 2.0 & 2.0 \le h/r \le 20.0 \\ \hline C_1 & 1.795 + 1.481h/r - 0.211(h/r)^2 & 2.966 + 0.502h/r - 0.009(h/r)^2 \\ C_2 & -3.544 - 3.677h/r + 0.578(h/r)^2 & -6.475 - 1.126h/r + 0.019(h/r)^2 \\ C_3 & 5.459 + 3.691h/r - 0.565(h/r)^2 & 8.023 + 1.253h/r - 0.020(h/r)^2 \\ C_4 & -2.678 - 1.531h/r + 0.205(h/r)^2 & -3.572 - 0.634h/r + 0.010(h/r)^2 \end{array}$ for semicircular notch ($h/r = 1.0$) $K_t = 3.065 - 6.643\left(\frac{h}{D}\right) + 0.205\left(\frac{h}{D}\right)^2 - 4.004\left(\frac{h}{D}\right)^3$
4. Multiple opposite semicircular notches in finite-width plate 	Axial tension 	$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = P/td$ $K_t = C_1 + C_2\left(\frac{2r}{L}\right) + C_3\left(\frac{2r}{L}\right)^2 + C_4\left(\frac{2r}{L}\right)^3$ $\begin{array}{c\|l} & 2r/D \le 0.4, \qquad 0 \le 2r/L \le 1.0 \\ \hline C_1 & 3.1055 - 3.4287\left(\frac{2r}{D}\right) + 0.8522\left(\frac{2r}{D}\right)^2 \\ C_2 & -1.4370 + 10.5053\left(\frac{2r}{D}\right) - 8.7547\left(\frac{2r}{D}\right)^2 - 19.6273\left(\frac{2r}{D}\right)^3 \\ C_3 & -1.6753 - 14.0851\left(\frac{2r}{D}\right) + 43.6575\left(\frac{2r}{D}\right)^2 \\ C_4 & 1.7207 + 5.7974\left(\frac{2r}{D}\right) - 27.7463\left(\frac{2r}{D}\right)^2 + 6.0444\left(\frac{2r}{D}\right)^3 \end{array}$

TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Notches and Grooves

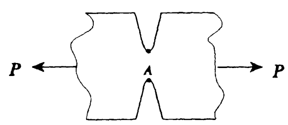
<table>
<tr>
<td>

5.
Opposite single V-shaped notches in finite-width plate



</td>
<td>

Axial tension



</td>
<td>

$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = P/td$
For $2h/D = 0.398$ and $\alpha < 90°$,
$2h/D = 0.667$ and $\alpha < 60°$:

$$K_t = K_{tu}$$

K_{tu} is the stress concentration factor for U-shaped notch and α is notch angle in degrees. Otherwise,
$K_t = C_1 + C_2\sqrt{K_{tu}} + C_3 K_{tu}$.

	$2h/D = 0.398,\ 90° \le \alpha \le 150°,\ 1.6 \le K_{tu} \le 3.5$
C_1	$5.294 - 0.1225\alpha + 0.000523\alpha^2$
C_2	$-5.0002 + 0.1171\alpha - 0.000434\alpha^2$
C_3	$1.423 - 0.01197\alpha - 0.000004\alpha^2$

	$2h/D = 0.667,\ 60° \le \alpha \le 150°,\ 1.6 \le K_{tu} \le 2.8$
C_1	$-10.01 + 0.1534\alpha - 0.000647\alpha^2$
C_2	$13.60 - 0.2140\alpha + 0.000973\alpha^2$
C_3	$-3.781 + 0.07873\alpha - 0.000392\alpha^2$

</td>
</tr>
</table>

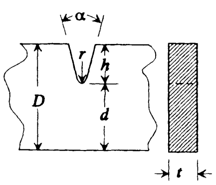
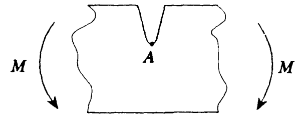
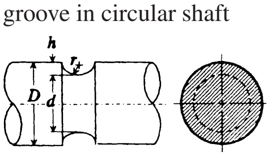
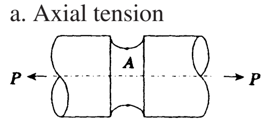
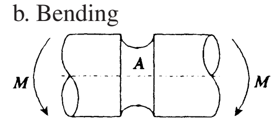
6. Single V-shaped notch on one side 	In-plane bending 	$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = 6M/td^2$ For $\alpha \le 90°$, $K_t = K_{tu}$ For $90° < \alpha \le 150°$ and $0.5 \le h/r \le 4.0$, $K_t = 1.11K_{tu} - \left[-0.0159 + 0.2243\left(\frac{\alpha}{150}\right) - 0.4293\left(\frac{\alpha}{150}\right)^2 + 0.3609\left(\frac{\alpha}{150}\right)^3\right] K_{tu}^2$ K_{tu} is the stress concentration factor for U notch, case 3b, and α is notch angle in degrees.
7. U-shaped circumferential groove in circular shaft 	a. Axial tension 	$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = 4P/\pi d^2$ $K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3\left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4\left(\frac{2h}{D}\right)^3$ $\begin{array}{c\|c\|c} & 0.1 \le h/r < 2.0 & 2.0 \le h/r \le 50.0 \\ \hline C_1 & 0.89 + 2.208\sqrt{h/r} - 0.094h/r & 1.037 + 1.967\sqrt{h/r} + 0.002h/r \\ C_2 & -0.923 - 6.678\sqrt{h/r} + 1.638h/r & -2.679 - 2.980\sqrt{h/r} - 0.053h/r \\ C_3 & 2.893 + 6.448\sqrt{h/r} - 2.516h/r & 3.090 + 2.124\sqrt{h/r} + 0.165h/r \\ C_4 & -1.912 - 1.944\sqrt{h/r} + 0.963h/r & -0.424 - 1.153\sqrt{h/r} - 0.106h/r \end{array}$ for semicircular groove ($h/r = 1.0$) $K_t = 3.004 - 5.963\left(\frac{2h}{D}\right) + 6.836\left(\frac{2h}{D}\right)^2 - 2.893\left(\frac{2h}{D}\right)^3$

TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Notches and Grooves

b. Bending



$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = 32\, M/\pi d^3$

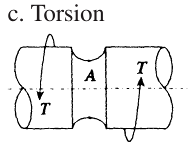
$$K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

	$0.25 \le h/r < 2.0$	$2.0 \le h/r \le 50.0$
C_1	$0.594 + 2.958\sqrt{h/r} - 0.520h/r$	$0.965 + 1.926\sqrt{h/r}$
C_2	$0.422 - 10.545\sqrt{h/r} + 2.692h/r$	$-2.773 - 4.414\sqrt{h/r} - 0.017h/r$
C_3	$0.501 + 14.375\sqrt{h/r} - 4.486h/r$	$4.785 + 4.681\sqrt{h/r} + 0.096h/r$
C_4	$-0.613 - 6.573\sqrt{h/r} + 2.177h/r$	$-1.995 - 2.241\sqrt{h/r} - 0.074h/r$

for semicircular groove ($h/r = 1.0$)

$$K_t = 3.032 - 7.431 \left(\frac{2h}{D}\right) + 10.390 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 - 5.009 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

c. Torsion



$\tau_{\max} = \tau_A = K_t \tau_{\text{nom}}, \qquad \tau_{\text{nom}} = 16T/\pi d^3$

$$K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

	$0.25 \le h/r < 2.0$	$2.0 \le h/r \le 50.0$
C_1	$0.966 + 1.056\sqrt{h/r} - 0.022h/r$	$1.089 + 0.924\sqrt{h/r} + 0.018h/r$
C_2	$-0.192 - 4.037\sqrt{h/r} + 0.674h/r$	$-1.504 - 2.141\sqrt{h/r} - 0.047h/r$
C_3	$0.808 + 5.321\sqrt{h/r} - 1.231h/r$	$2.486 + 2.289\sqrt{h/r} + 0.091h/r$
C_4	$-0.567 - 2.364\sqrt{h/r} + 0.566h/r$	$-1.056 - 1.104\sqrt{h/r} - 0.059h/r$

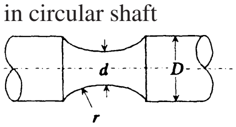
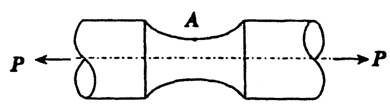
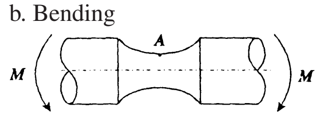
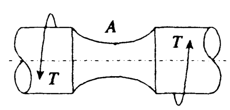
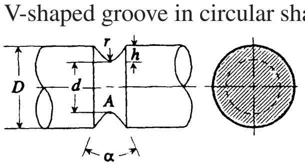
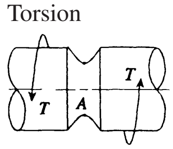
8. Large circumferential groove in circular shaft  	a. Axial tension  	$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = 4P/\pi d^2$ $K_t = C_1 + C_2(r/d) + C_3(r/d)^2$ $0.3 \le r/d \le 1.0, \qquad 1.005 \le D/d \le 1.10$ C_1: $-81.39 + 153.10(D/d) - 70.49(D/d)^2$ C_2: $119.64 - 221.81(D/d) + 101.93(D/d)^2$ C_3: $-57.88 + 107.33(D/d) - 49.34(D/d)^2$
	b. Bending  	$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = 32M/\pi d^3$ $K_t = C_1 + C_2(r/d) + C_3(r/d)^2$ $0.3 \le r/d \le 1.0, \qquad 1.005 \le D/d < 1.10$ C_1: $-39.58 + 73.22(D/d) - 32.46(D/d)^2$ C_2: $-9.477 + 29.41(D/d) - 20.13(D/d)^2$ C_3: $82.46 - 166.96(D/d) + 84.58(D/d)^2$
	c. Torsion  	$\tau_{\max} = \tau_A = K_t \tau_{\text{nom}}, \qquad \tau_{\text{nom}} = 16T/\pi d^3$ $K_t = C_1 + C_2(r/d) + C_3(r/d)^2$ $0.3 \le r/d \le 1, \qquad 1.005 \le D/d < 1.10$ C_1: $-35.16 + 67.57(D/d) - 31.28(D/d)^2$ C_2: $79.13 - 148.37(D/d) + 69.09(D/d)^2$ C_3: $-50.34 + 94.67(D/d) - 44.26(D/d)^2$

TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Notches and Grooves

9. V-shaped groove in circular shaft  	Torsion  	$\tau_{\max} = \tau_A = K_t \tau_{\text{nom}}, \qquad \tau_{\text{nom}} = 16T/\pi d^3$ $K_{tu} =$ stress concentration factor for U-shaped groove ($\alpha = 0$), case 7c $K_t = C_1 + C_2\sqrt{K_{tu}} + C_3 K_{tu}$ C_1: $0.2026\sqrt{\alpha} - 0.06620\alpha + 0.00281\alpha\sqrt{\alpha}$ C_2: $-0.2226\sqrt{\alpha} + 0.07814\alpha - 0.002477\alpha\sqrt{\alpha}$ C_3: $1 + 0.0298\sqrt{\alpha} - 0.01485\alpha - 0.000151\alpha\sqrt{\alpha}$ where α is in degrees. For $0° \le \alpha \le 90°$, K_t is independent of r/d; for $90° \le \alpha \le 125°$, K_t is applicable only if $r/d \le 0.01$.

II. Holes

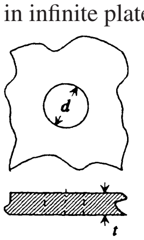
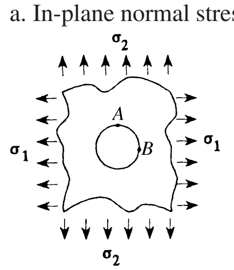
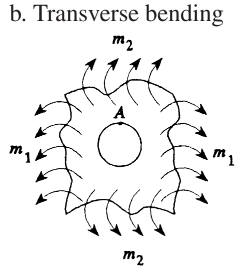
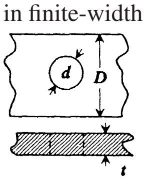
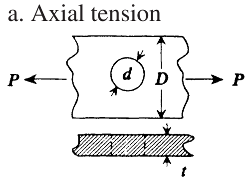
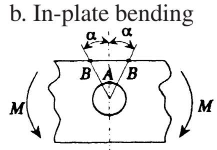
Type of Stress Raiser	Loading Condition	Stress Concentration Factor
1. Single circular hole in infinite plate 	a. In-plane normal stress 	(1) Uniaxial tension ($\sigma_2 = 0$) $\sigma_{\max} = K_t \sigma_1$ $\sigma_A = 3\sigma_1$ or $K_t = 3$ $\sigma_B = -\sigma_1$ or $K_t = -1$ (2) Biaxial tension $K_t = 3 - \sigma_2/\sigma_1$ for $-1 \le \sigma_2/\sigma_1 \le 1$ For $\sigma_2 = \sigma_1,\ \sigma_A = \sigma_B = 2\sigma_1$ or $K_t = 2$ For $\sigma_2 = -\sigma_1$ (pure shear stress), $\sigma_A = -\sigma_B = 4\sigma_1$ or $K_t = 4$
	b. Transverse bending 	$\sigma_{\max} = K_t \sigma, \quad \sigma = 6m/t^2, \quad \nu = 0.3$ (1) Simple bending ($m_1 = m,\ m_2 = 0$) For $0 \le d/t \le 7.0$, $\sigma_{\max} = \sigma_A$ $K_t = 3.000 - 0.947\sqrt{d/t} + 0.192d/t$ (2) Cylindrical bending ($m_1 = m,\ m_2 = \nu m$) For $0 \le d/t \le 7.0$, $\sigma_{\max} = \sigma_A$ $K_t = 2.700 - 0.647\sqrt{d/t} + 0.129d/t$ (3) Isotropic bending ($m_1 = m_2 = m$), $\sigma_{\max} = \sigma_A$ $K_t = 2$ (independent of d/t)
	c. Twisting moment (see preceding figure and definitions)	$\sigma_{\max} = K_t \sigma, \quad \sigma = 6m/t^2$ $m_1 = m, \quad m_2 = -m, \quad \nu = 0.3$ For $0 \le d/t \le 7.0$, $K_t = 4.000 - 1.772\sqrt{d/t} + 0.341d/t$

TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Holes

2. Central single circular hole in finite-width plate 	a. Axial tension 	$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t\sigma_{\text{nom}}, \quad \sigma_{\text{nom}} = P/[t(D-d)]$ $K_t = 3.000 - 3.140(d/D) + 3.667(d/D)^2 - 1.527(d/D)^3$ for $0 \le d/D \le 1$
	b. In-plate bending 	(1) At edge of hole, $\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t\sigma_{\text{nom}}, \quad \sigma_{\text{nom}} = 6Md/(D^3 - d^3)t$ $K_t = 2$ (independent of d/D) (2) At edge of plate, $\sigma_{\max} = \sigma_B = K_t\sigma_{\text{nom}}, \quad \sigma_{\text{nom}} = 6MD/(D^3 - d^3)t$ $K_t = 2d/D(\alpha = 30°)$

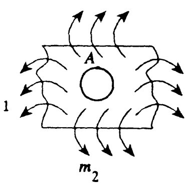
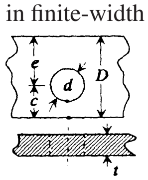
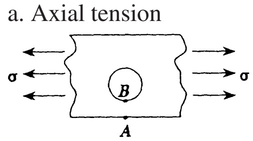
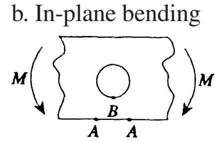
	c. Transverse bending  	$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = 6mD/(D-d)t^2$ For $0 \le d/D \le 0.3,\ \nu = 0.3$ and $1 \le d/t \le 7$ (1) Simple bending $(m_1 = m,\ m_2 = 0)$ $K_t = \left[1.793 + \frac{0.131}{d/t} + \frac{2.052}{(d/t)^2} - \frac{1.019}{(d/t)^3}\right] \times \left[1 - 1.04\left(\frac{d}{D}\right) + 1.22\left(\frac{d}{D}\right)^2\right]$ (2) Cylindrical bending $(m_1 = m,\ m_2 = \nu m)$ $K_t = \left[1.856 + \frac{0.317}{d/t} + \frac{0.942}{(d/t)^2} - \frac{0.415}{(d/t)^3}\right] \times \left[1 - 1.04\left(\frac{d}{D}\right) + 1.22\left(\frac{d}{D}\right)^2\right]$
3. Eccentric circular hole in finite-width plane  	a. Axial tension  	Stress on section AB is $\sigma_{\text{nom}} = \frac{\sigma\sqrt{1-(d/2c)^2}}{1-d/2c}\ \frac{1-c/D}{1-(c/d)\left[2-\sqrt{1-(d/2c)^2}\right]}$ $\sigma_{\max} = \sigma_B = K_t \sigma_{\text{nom}}$ $K_t = 3.000 - 3.140\left(\frac{d}{2c}\right) + 3.667\left(\frac{d}{2c}\right)^2 - 1.527\left(\frac{d}{2c}\right)^3$

TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Holes

	b. In-plane bending  	$\sigma_{\max} = \max(\sigma_A, \sigma_B)$ $\sigma_B = K_{t_B}\sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = 6M/D^2t$ $K_{t_B} = C_1 + C_2\frac{c}{e} + C_3\left(\frac{c}{e}\right)^2$ $0 \le d/2c \le 0.5, \qquad 0 \le c/e \le 1.0$ C_1: $3.000 - 0.631(d/2c) + 4.007(d/2c)^2$ C_2: $-5.083 + 4.067(d/2c) - 2.795(d/2c)^2$ C_3: $2.114 - 1.682(d/2c) - 0.273(d/2c)^2$ $\sigma_A = K_{t_A}\sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = 6M/D^2t$ $K_{t_A} = C_1' + C_2'\frac{c}{e} + C_3'\left(\frac{c}{e}\right)^2$ C_1': $1.0286 - 0.1638(d/2c) + 2.702(d/2c)^2$ C_2': $-0.05863 - 0.1335(d/2c) - 1.8747(d/2c)^2$ C_3': $0.18883 - 0.89219(d/2c) + 1.5189(d/2c)^2$
4. Two equal circular holes in infinite plate	a. Uniaxial tension parallel to row of holes $(\sigma_1 = \sigma,\ \sigma_2 = 0)$	$\sigma_{\max} = K_t\sigma$ for $0 \le d/L \le 1$ $K_t = 3.000 - 0.712\left(\frac{d}{L}\right) + 0.271\left(\frac{d}{L}\right)^2$

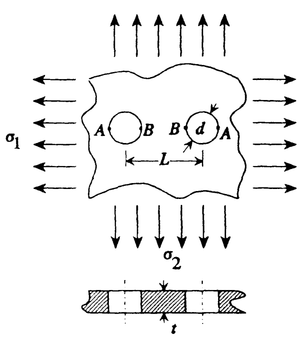
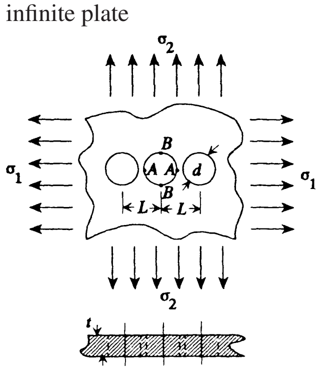
	b. Uniaxial tension normal to row of holes ($\sigma_2 = \sigma, \sigma_1 = 0$)	$\sigma_{\max} = \sigma_B = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = \frac{\sigma\sqrt{1-(d/L)^2}}{1-d/L}$ $K_t = 3.0000 - 3.0018\left(\frac{d}{L}\right) + 1.0099\left(\frac{d}{L}\right)^2$ for $0 \le d/L \le 1$
	c. Biaxial tension ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$)	$\sigma_{\max} = \sigma_B = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = \frac{\sigma\sqrt{1-(d/L)^2}}{1-d/L}$ $K_t = 2.000 - 2.119\left(\frac{d}{L}\right) + 2.493\left(\frac{d}{L}\right)^2 - 1.372\left(\frac{d}{L}\right)^3$ for $0 \le d/L \le 1$

TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Holes

5. Single row of circular holes in infinite plate 	a. Uniaxial tension normal to row of holes $(\sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = \sigma)$	$\sigma_{\max} = \sigma_B = K_t \sigma$ $K_t = 3.0000 - 0.9916\left(\frac{d}{L}\right) - 2.5899\left(\frac{d}{L}\right)^2 + 2.2613\left(\frac{d}{L}\right)^3$ for $0 \le d/L \le 1$
	b. Uniaxial tension parallel to row of holes $(\sigma_1 = \sigma,\ \sigma_2 = 0)$	$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = \sigma/(1 - d/L)$ $K_t = 3.000 - 3.095\left(\frac{d}{L}\right) + 0.309\left(\frac{d}{L}\right)^2 + 0.786\left(\frac{d}{L}\right)^3$ for $0 \le d/L \le 1$
	c. Biaxial tension $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma)$	$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = \sigma/(1 - d/L)$ $K_t = 2.000 - 1.597\left(\frac{d}{L}\right) + 0.934\left(\frac{d}{L}\right)^2 - 0.337\left(\frac{d}{L}\right)^3$ for $0 \le d/L \le 1$

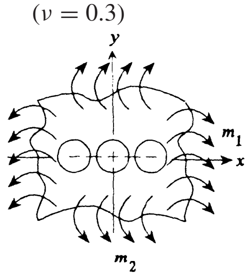
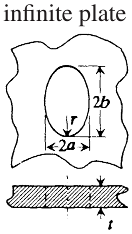
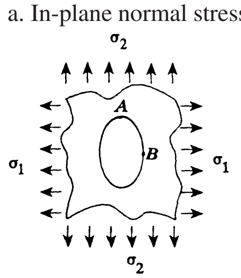
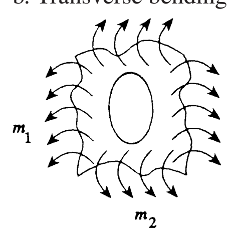
	d. Transverse bending ($\nu = 0.3$)  	Bending about y axis: $\sigma_{max} = K_t \sigma_{nom}$, $\sigma_{nom} = 6m/t^2$ for $0 \le d/L \le 1$ (1) Simple bending ($m_1 = m,\ m_2 = 0$) $K_t = 1.787 - 0.060\left(\frac{d}{L}\right) - 0.785\left(\frac{d}{L}\right)^2 + 0.217\left(\frac{d}{L}\right)^3$ (2) Cylindrical bending ($m_1 = m,\ m_2 = \nu m$) $K_t = 1.850 - 0.030\left(\frac{d}{L}\right) - 0.994\left(\frac{d}{L}\right)^2 + 0.389\left(\frac{d}{L}\right)^3$ Bending about x axis: $\sigma_{max} = K_t \sigma_{nom}$, $\sigma_{nom} = 6m/t^2(1 - d/L)$ for $0 \le d/L \le 1$ (1) Simple bending ($m_1 = m,\ m_2 = 0$) $K_t = 1.788 - 1.729\left(\frac{d}{L}\right) + 1.094\left(\frac{d}{L}\right)^2 - 0.111\left(\frac{d}{L}\right)^3$ (2) Cylindrical bending ($m_1 = m,\ m_2 = \nu m$) $K_t = 1.849 - 1.741\left(\frac{d}{L}\right) + 0.875\left(\frac{d}{L}\right)^2 + 0.081\left(\frac{d}{L}\right)^3$

TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Holes

<table>
<tr>
<td rowspan="2">6.
Single elliptical hole in infinite plate


$r = \dfrac{a^2}{b}$</td>
<td>a. In-plane normal stress

</td>
<td>(1) Uniaxial tension ($\sigma_1 = \sigma,\ \sigma_2 = 0$):
$\sigma_A = K_t\sigma$
$K_t = 1 + \frac{2a}{b} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{r}}$ for $0 < a/b < 10$
and $\sigma_B = -\sigma$

(2) Biaxial tension:
For $-1 \le \sigma_2/\sigma_1 \le 1$ and $0.25 \le a/b \le 4$,
$\sigma_A = K_{tA}\sigma_1, \qquad K_{tA} = 1 + \frac{2a}{b} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$
$\sigma_B = K_{tB}\sigma_1, \qquad K_{tB} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\left(1 + \frac{2b}{a}\right) - 1$

For $\sigma_1 = \sigma_2$,
$K_{tA} = 2a/b, \qquad K_{tB} = 2b/a$</td>
</tr>
<tr>
<td>b. Transverse bending

</td>
<td>$\sigma_{\max} = K_t\sigma, \qquad \sigma = 6m/t^2,\ \nu = 0.3$
for $2a/t > 5$ and $0.2 \le a/b < 5$
(1) Simple bending ($m_1 = m,\ m_2 = 0$)
$K_t = 1 + \frac{2(1+\nu)(a/b)}{3+\nu}$ for $2a/t > 5$
(2) Cylindrical bending ($m_1 = m,\ m_2 = \nu m$)
$K_t = \frac{(1+\nu)[2(a/b)+3-\nu]}{3+\nu}$
(3) Isotropic bending ($m_1 = m_2 = m$)
$K_t = 2$ (constant)</td>
</tr>
</table>

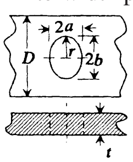
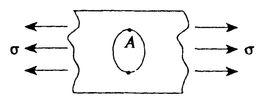
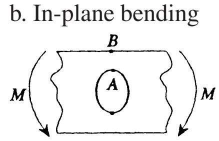
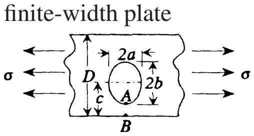
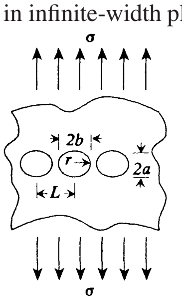
<table>
<tr>
<td rowspan="2">7.
Single elliptical hole in finite-width plate
</td>
<td>a. Axial tension
</td>
<td>$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = \sigma/(1 - 2a/D)$
$K_t = C_1 + C_2 \frac{2a}{D} + C_3 \left(\frac{2a}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2a}{D}\right)^3,$
$$\begin{array}{c|c} & 1.0 \le a/b \le 8.0 \\ \hline C_1 & 1.109 - 0.188\sqrt{a/b} + 2.086a/b \\ C_2 & -0.486 + 0.213\sqrt{a/b} - 2.588a/b \\ C_3 & 3.816 - 5.510\sqrt{a/b} + 4.638a/b \\ C_4 & -2.438 + 5.485\sqrt{a/b} - 4.126a/b \end{array}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>b. In-plane bending
</td>
<td>$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = 12Ma/(D^3 - 8a^3)t$
$K_t = C_1 + C_2 \left(\frac{2a}{D}\right) + C_3 \left(\frac{2a}{D}\right)^2$
$$\begin{array}{c|c} & 0.4 \le 2a/D \le 1.0, \qquad 1.0 \le a/b \le 2.0 \\ \hline C_1 & 1.509 + 0.336(a/b) + 0.155(a/b)^2 \\ C_2 & -0.416 + 0.445(a/b) - 0.029(a/b)^2 \\ C_3 & 0.878 - 0.736(a/b) - 0.142(a/b)^2 \end{array}$$
for $2a/D \le 0.4,\ \sigma_{\max} = \sigma_B = 6M/D^2t$</td>
</tr>
</table>

TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Holes

8. Eccentric elliptical hole in finite-width plate 	Axial tension	Stress on section AB is $\sigma_{\text{nom}} = \frac{\sqrt{1-a/c}}{1-a/c} \frac{1-c/D}{1-(c/D)\left[2-\sqrt{1-(a/c)^2}\right]}$ and $\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}}$ $K_t = C_1 + C_2 \frac{a}{c} + C_3 \left(\frac{a}{c}\right)^2 + C_4 \left(\frac{a}{c}\right)^3$ for $1.0 \le a/b \le 8.0$ and $0 \le a/c \le 1$ Expressions for C_1, C_2, C_3, and C_4 from case 7a can be used.
9. Infinite row of elliptical holes in infinite-width plate 	Uniaxial tension	$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = \sigma/(1 - 2a/L)$ For $0 \le 2a/L \le 0.7$ and $1 \le a/b \le 10$, $K_t = \left[1.002 - 1.016\left(\frac{2a}{L}\right) + 0.253\left(\frac{2a}{L}\right)^2\right]\left(1 + \frac{2a}{b}\right)$

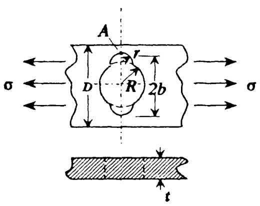
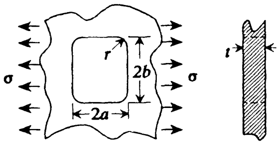
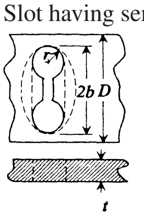
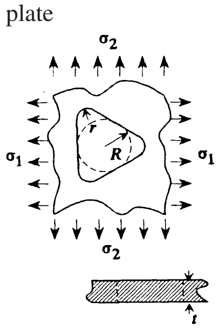
10. Circular hole with opposite semicircular lobes in finite-width plate 	Axial tension	$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = \sigma/(1 - 2b/D)$ For $0 \le 2b/D \le 1$, $K_t = K_{t0}\left[1 - \frac{2b}{D} + \left(\frac{6}{K_{t0}} - 1\right)\left(\frac{b}{D}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{K_{t0}}\right)\left(\frac{b}{D}\right)^3\right]$ where for $0.2 < r/R \le 4.0$, $K_{t0} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma} = 2.2889 + \frac{1.6355}{\sqrt{r/R}} - \frac{0.0157}{r/R}$ For infinitely wide plate, $K_t = K_{t0}$.
11. Rectangular hole with rounded corners in infinite-width plate 	Uniaxial tension	$\sigma_{\max} = K_t \sigma$ $K_t = C_1 + C_2 \frac{a}{b} + C_3\left(\frac{a}{b}\right)^2 + C_4\left(\frac{a}{b}\right)^3$ $\begin{array}{c\|c} & 0.05 \le r/2a \le 0.5, \qquad 0.2 \le a/b \le 1.0 \\ \hline C_1 & 14.815 - 22.308\sqrt{r/2a} + 16.298(r/2a) \\ C_2 & -11.201 - 13.789\sqrt{r/2a} + 19.200(r/2a) \\ C_3 & 0.2020 + 54.620\sqrt{r/2a} - 54.748(r/2a) \\ C_4 & 3.232 - 32.530\sqrt{r/2a} + 30.964(r/2a) \end{array}$

TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Holes

12. Slot having semicircular ends  	a. Axial tension $a_{eq} = \sqrt{rb}$ where a_{eq} is width of equivalent ellipse	If the openings such as two holes connected by a slit or an ovaloid are enveloped by an ellipse with the same $2b$ and r, K_t can be approximated by using an equivalent ellipse having the same dimensions $2b$ and r. See cases 6a and 8.
	b. In-plane bending $a_{eq} = \sqrt{rb}$	Use an equivalent ellipse. See case 6b.
13. Equilateral triangular hole with round corners in infinite-width plate  	a. Uniaxial tension ($\sigma_1 = \sigma,\ \sigma_2 = 0$)	$\sigma_{max} = K_t\sigma$ For $0.25 \le r/R \le 0.75$ $K_t = 6.191 - 7.215(r/R) + 5.492(r/R)^2$
	b. Biaxial tension ($\sigma_1 = \sigma,\ \sigma_2 = \sigma/2$)	$\sigma_{max} = K_t\sigma$ For $0.25 \le r/R \le 0.75$ $K_t = 6.364 - 8.885(r/R) + 6.494(r/R)^2$
	c. Biaxial tension ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$)	$\sigma_{max} = K_t\sigma$ For $0.25 \le r/R \le 0.75$ $K_t = 7.067 - 11.099(r/R) + 7.394(r/R)^2$

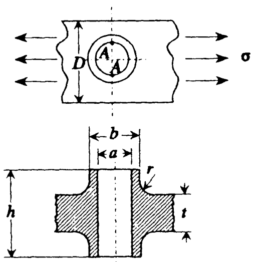
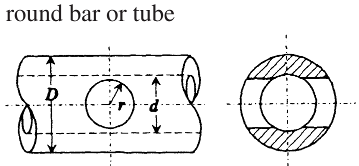
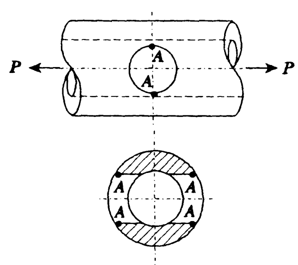
<table>
<tr>
<td rowspan="2">14.
Single symmetrically reinforced circular hole in finite-width plate in tension

</td>
<td>a. Without fillet ($r = 0$)</td>
<td>$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t\sigma$
where $\sigma_{\max} =$ maximum mean stress for thickness sliced off to plate thickness t. For $b/t = 5.0$,
$$K_t = C_1 + C_2\left(\frac{1}{h/t}\right) + C_3\left(\frac{1}{h/t}\right)^2$$
<table>
<tr><th></th><th>$D/b \ge 4.0$, $1 \le h/t \le 5$ and $0.3 \le a/b \le 0$</th></tr>
<tr><td>C_1</td><td>$1.869 + 1.196(a/b) - 0.393(a/b)^2$</td></tr>
<tr><td>C_2</td><td>$-3.042 + 6.476(a/b) - 4.871(a/b)^2$</td></tr>
<tr><td>C_3</td><td>$4.036 - 7.229(a/b) + 5.180(a/b)^2$</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>b. With fillet ($r \neq 0$)</td>
<td>For $r/t \ge 0.6$, $0.3 \le a/b \le 0.7$, and $h/t \ge 3.0$,
$K_t = 3.000 - 2.206\sqrt{R} + 0.948R - 0.142R\sqrt{R}$
where $R = \dfrac{\text{cross-sectional area of added reinforcement}}{\text{cross-sectional area of hole (without added reinforcement)}}$
$R = \left(\frac{b}{a} - 1\right)\left(\frac{h}{t} - 1\right) + (4 - \pi)\frac{r^2}{at}$</td>
</tr>
</table>

TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Holes

15.
Transverse circular hole in round bar or tube



a. Axial tension



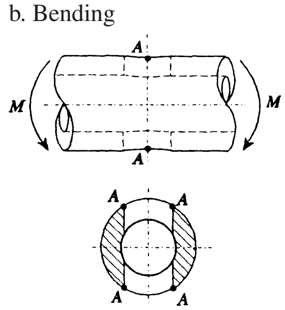
$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}$

where $\sigma_{\text{nom}} = \frac{4P}{\pi(D^2 - d^2)}$

$K_t = C_1 + C_2 \frac{2r}{D} + C_3 \left(\frac{2r}{D}\right)^2$

	$d/D \le 0.9, \quad 2r/D \le 0.45$
C_1	3.000
C_2	$0.427 - 6.770(d/D) + 22.698(d/D)^2 - 16.670(d/D)^3$
C_3	$11.357 + 15.665(d/D) - 60.929(d/D)^2 + 41.501(d/D)^3$

b. Bending



$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}$

where $\sigma_{\text{nom}} = \frac{32MD}{\pi(D^4 - d^4)}$

$K_t = C_1 + C_2 \frac{2r}{D} + C_3 \left(\frac{2r}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2r}{D}\right)^3$

	$d/D \le 0.9, \quad 2r/D \le 0.4$
C_1	3.000
C_2	$-6.250 - 0.585(d/D) + 3.115(d/D)^2$
C_3	$41.000 - 1.071(d/D) - 6.746(d/D)^2$
C_4	$-45.000 + 1.389(d/D) + 13.889(d/D)^2$

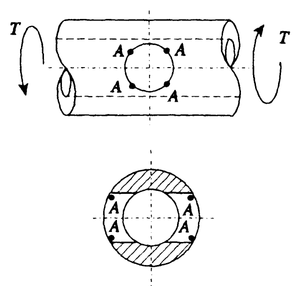
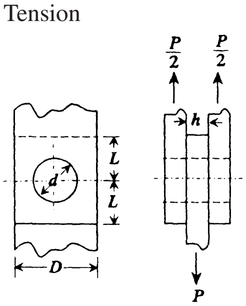
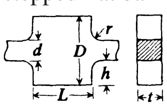
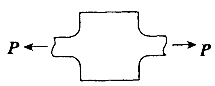
	c. Torsion 	$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \tau_{\text{nom}}, \qquad \tau_{\text{nom}} = 16TD/\pi(D^4 - d^4)$ $K_t = C_1 + C_2 \frac{2r}{D} + C_3 \left(\frac{2r}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2r}{D}\right)^3$ $\begin{array}{l\|l} & 2r/d \le 0.4, \qquad d/D \le 0.8 \\ \hline C_1 & 4.000 \\ C_2 & -6.055 + 3.184(d/D) - 3.461(d/D)^2 \\ C_3 & 32.764 - 30.121(d/D) + 39.887(d/D)^2 \\ C_4 & -38.330 + 51.542\sqrt{d/D} - 27.483(d/D) \end{array}$ Maximum stress occurs inside hole on hole surface, near outer surface of bar Maximum shear stress concentration factor $K_{tS} = \tau_{\max}/\tau_{\text{nom}} = \frac{1}{2}K_t$
16. Round pin joint with closely fitting pin in finite-width plate	Tension 	Nominal stress based on net section: $\sigma_{\max} = K_{ta}\sigma_{na}, \quad \sigma_{na} = P/(D-d)h$ Nominal stress based on bearing area: $\sigma_{\max} = K_{tb}\sigma_{nb}, \quad \sigma_{nb} = P/dh$ For $0.15 \le d/D \le 0.75,\ L/D \ge 1.0$, $K_{ta} = 12.882 - 52.714\left(\frac{d}{D}\right) + 89.762\left(\frac{d}{D}\right)^2 - 51.667\left(\frac{d}{D}\right)^3$ $K_{tb} = 0.2880 + 8.820\left(\frac{d}{D}\right) - 23.196\left(\frac{d}{D}\right)^2 + 29.167\left(\frac{d}{D}\right)^3$

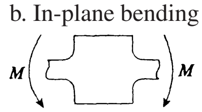
TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Fillets

III. Fillets

Type of Stress Raiser	Loading Conditions	Stress Concentration Factor
1. Opposite shoulder fillets in stepped flat bar 	a. Axial tension 	$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\mathrm{nom}}, \qquad \sigma_{\mathrm{nom}} = P/td$ $K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$ where $\frac{L}{D} > -1.89\left(\frac{r}{d} - 0.15\right) + 5.5$

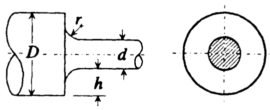
	$0.1 \le h/r \le 2.0$	$2.0 \le h/r \le 20.0$
C_1	$1.006 + 1.008\sqrt{h/r} - 0.044h/r$	$1.020 + 1.009\sqrt{h/r} - 0.048h/r$
C_2	$-0.115 - 0.584\sqrt{h/r} + 0.315h/r$	$-0.065 - 0.165\sqrt{h/r} - 0.007h/r$
C_3	$0.245 - 1.006\sqrt{h/r} - 0.257h/r$	$-3.459 + 1.266\sqrt{h/r} - 0.016h/r$
C_4	$-0.135 + 0.582\sqrt{h/r} - 0.017h/r$	$3.505 - 2.109\sqrt{h/r} + 0.069h/r$

For cases where $L/D < -1.89(r/d - 0.15) + 5.5$, see Ref. [6.1].

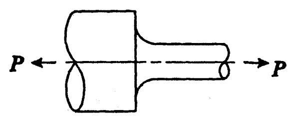
Type of Stress Raiser	Loading Conditions	Stress Concentration Factor
	b. In-plane bending 	$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\mathrm{nom}}, \qquad \sigma_{\mathrm{nom}} = 6M/td^2$ $K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$ where $\frac{L}{D} > -2.05\left(\frac{r}{d} - 0.025\right) + 2.0$

	$0.1 \le h/r \le 2.0$	$2.0 \le h/r \le 20.0$
C_1	$1.006 + 0.967\sqrt{h/r} + 0.013h/r$	$1.058 + 1.002\sqrt{h/r} - 0.038h/r$
C_2	$-0.270 - 2.372\sqrt{h/r} + 0.708h/r$	$-3.652 + 1.639\sqrt{h/r} - 0.436h/r$
C_3	$0.662 + 1.157\sqrt{h/r} - 0.908h/r$	$6.170 - 5.687\sqrt{h/r} + 1.175h/r$
C_4	$-0.405 + 0.249\sqrt{h/r} - 0.200h/r$	$-2.558 + 3.046\sqrt{h/r} - 0.701h/r$

2.
Shoulder fillet in stepped circular shaft



a. Axial tension

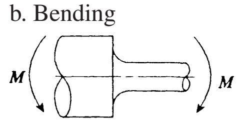


$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = 4P/\pi d^2$$

$$K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

	$0.1 \le h/r \le 2.0$	$2.0 \le h/r \le 20.0$
C_1	$0.926 + 1.157\sqrt{h/r} - 0.099h/r$	$1.200 + 0.860\sqrt{h/r} - 0.022h/r$
C_2	$0.012 - 3.036\sqrt{h/r} + 0.961h/r$	$-1.805 - 0.346\sqrt{h/r} - 0.038h/r$
C_3	$-0.302 + 3.977\sqrt{h/r} - 1.744h/r$	$2.198 - 0.486\sqrt{h/r} + 0.165h/r$
C_4	$0.365 - 2.098\sqrt{h/r} + 0.878h/r$	$-0.593 - 0.028\sqrt{h/r} - 0.106h/r$

b. Bending



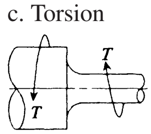
$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = 32M/\pi d^3$$

$$K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

	$0.1 \le h/r \le 2.0$	$2.0 \le h/r \le 20.0$
C_1	$0.947 + 1.206\sqrt{h/r} - 0.131h/r$	$1.232 + 0.832\sqrt{h/r} - 0.008h/r$
C_2	$0.022 - 3.405\sqrt{h/r} + 0.915h/r$	$-3.813 + 0.968\sqrt{h/r} - 0.260h/r$
C_3	$0.869 + 1.777\sqrt{h/r} - 0.555h/r$	$7.423 - 4.868\sqrt{h/r} + 0.869h/r$
C_4	$-0.810 + 0.422\sqrt{h/r} - 0.260h/r$	$-3.839 + 3.070\sqrt{h/r} - 0.600h/r$

TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Fillets

c. Torsion



$$\tau_{\max} = K_t \tau_{\text{nom}}, \qquad \tau_{\text{nom}} = 16T/\pi d^3$$

$$K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$$

	$0.25 \le h/r \le 4.0$
C_1	$0.905 + 0.783\sqrt{h/r} - 0.075h/r$
C_2	$-0.437 - 1.969\sqrt{h/r} + 0.553h/r$
C_3	$1.557 + 1.073\sqrt{h/r} - 0.578h/r$
C_4	$-1.061 + 0.171\sqrt{h/r} + 0.086h/r$

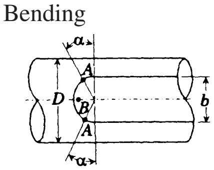
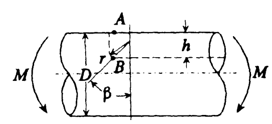
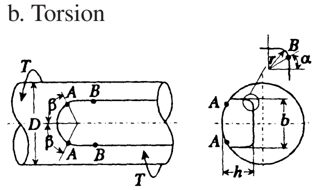
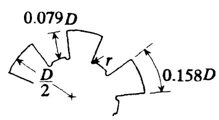
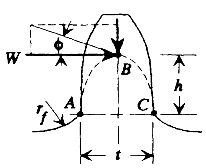
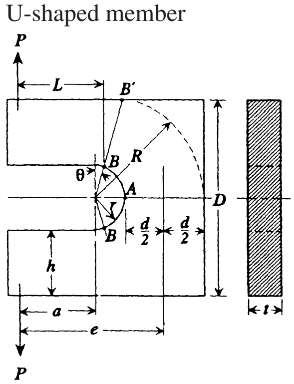
<table>
<tr><th colspan="3">IV. Miscellaneous Elements</th></tr>
<tr><th>Type of Stress Raiser</th><th>Loading Conditions</th><th>Stress Concentration Factor</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1.
Round shaft with semicircular end key seat</td><td>a. Bending

</td><td>$\sigma_{\max} = K_t\sigma, \qquad \sigma = 32M/\pi D^3$
$b = \frac{1}{4}D, \qquad h = \frac{1}{8}D, \qquad \alpha = 10^\circ, \qquad \beta = 15^\circ$
(1) At location A on surface:
$K_{tA} = 1.6$
(2) At location B at end of keyway:
$K_{tB} = 1.426 + 0.1643\left(\frac{0.1}{r/D}\right) - 0.0019\left(\frac{0.1}{r/D}\right)^2$
where $0.005 \le r/D \le 0.04$
$D \le 6.5$ in.
$h/D = 0.125$
For $D > 6.5$ in., it is suggested that the K_{tB} values for $r/D = 0.0208$ be used.</td></tr>
<tr><td>b. Torsion
</td><td>$h = \frac{1}{8}D, \qquad b = D/r, \qquad \alpha = 15^\circ, \qquad \beta = 50^\circ$
(1) At location A on surface:
$K_{tA} = \sigma_{\max}/\tau \simeq 3.4, \qquad \tau = 16T/\pi D^3$
(2) At location B in fillet:
$K_{tB} = \sigma_{\max}/\tau$
$= 1.953 + 0.1434\left(\frac{0.1}{r/D}\right) - 0.0021\left(\frac{0.1}{r/D}\right)^2$
for $0.005 \le r/D \le 0.07$</td></tr>
</table>

TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Miscellaneous Elements

2. Splined shaft	a. Torsion  	For an eight-tooth spline $K_{tS} = \tau_{max}/\tau, \qquad \tau = 16T/\pi D^3$ For $0.01 \le r/D \le 0.04$ $K_{tS} = 6.083 - 14.775\left(\frac{10r}{D}\right) + 18.250\left(\frac{10r}{D}\right)^2$
3. Gear teeth  	Bending plus some compression A and C are points of tangency of inscribed parabola ABC with tooth profile b = tooth width normal to plane of figure r_f = minimum radius of tooth fillet W = load per unit length of tooth face ϕ = angle between load W and normal to tooth face	Maximum stress occurs at fillet on tension side at base of tooth $\sigma_{max} = K_t\sigma_{nom}, \qquad \sigma_{nom} = \frac{6Wh}{bt^2} - \frac{W}{bt}\tan\phi$ For 14.5° pressure angle, $K_t = 0.22 + \left(\frac{t}{r_f}\right)^{0.2}\left(\frac{t}{h}\right)^{0.4}$ For 20° pressure angle, $K_t = 0.18 + \left(\frac{t}{r_f}\right)^{0.15}\left(\frac{t}{h}\right)^{0.45}$

4.
U-shaped member



where $\theta = 20^\circ$

$e = L + r + d/2$

For position A,

$$K_{tA} = \frac{\sigma_{\max} - P/td}{6Pe/td^2}$$

For position B,

$$K_{tB} = \frac{\sigma_{\max}}{PLc_B/I_B}$$

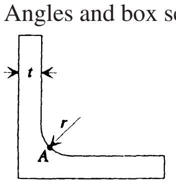
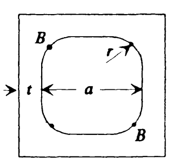
where I_B/c_B = section modulus at section in question (section BB')

(1) For square outer corners

$\frac{e}{r} = \frac{e}{h} = \frac{e}{d}$ $1.5 \le \frac{e}{r} \le 4.5$	$K_{tA} = 0.194 + 1.267\left(\frac{e}{r}\right) - 0.455\left(\frac{e}{r}\right)^2 + 0.050\left(\frac{e}{r}\right)^3$ $K_{tB} = 4.141 - 2.760\left(\frac{e}{r}\right) + 0.838\left(\frac{e}{r}\right)^2 - 0.082\left(\frac{e}{r}\right)^3$
$\frac{e}{2r} = \frac{e}{2h} = \frac{e}{d}$ $1.0 \le \frac{e}{2r} \le 2.5$	$K_{tA} = 0.800 + 1.147\left(\frac{e}{2r}\right) - 0.580\left(\frac{e}{2r}\right)^2 + 0.093\left(\frac{e}{2r}\right)^3$ $K_{tB} = 7.890 - 11.107\left(\frac{e}{2r}\right) + 6.020\left(\frac{e}{2r}\right)^2 - 1.053\left(\frac{e}{2r}\right)^3$

TABLE 6-1 (continued) STRESS CONCENTRATION FACTORS: Miscellaneous Elements

	$\frac{d}{r} = \frac{d}{h}$ $0.75 \leq \frac{d}{r} \leq 2.0$	When $a = 3r$, $K_{tA} = 1.143 + 0.074\left(\frac{d}{r}\right) + 0.026\left(\frac{d}{r}\right)^3$ $K_{tB} = 1.276$
		When $a = r$, $K_{tA} = 0.714 + 1.237\left(\frac{d}{r}\right) - 0.891\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 0.239\left(\frac{d}{r}\right)^3$ $K_{tB} = 1.374$
	$\frac{d}{r} = \frac{h}{r}$ $1.0 \leq \frac{d}{r} \leq 7.0$	For $a = 3r$, $K_{tA} = 0.982 + 0.303\left(\frac{d}{r}\right) - 0.017\left(\frac{d}{r}\right)^2$ $K_{tB} = 1.020 + 0.235\left(\frac{d}{r}\right) - 0.015\left(\frac{d}{r}\right)^2$
		For $a = r$, $K_{tA} = 1.010 + 0.281\left(\frac{d}{r}\right) - 0.012\left(\frac{d}{r}\right)^2$ $K_{tB} = 0.200 + 1.374\left(\frac{d}{r}\right) - 0.412\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 0.037\left(\frac{d}{r}\right)^3$

	(2) For rounded outer corners	
	$\frac{R}{r} = \frac{R}{d} = \frac{R}{h}$ $2.0 \le \frac{R}{r} \le 2.75$	For $a = 3r$, $K_{tA} = 48.959 - 60.004\left(\frac{R}{r}\right) + 24.933\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3.427\left(\frac{R}{r}\right)^3$ $K_{tB} = 79.769 - 98.346\left(\frac{R}{r}\right) + 40.806\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 5.610\left(\frac{R}{r}\right)^3$
		For $a = r$, $K_{tA} = 27.714 - 31.859\left(\frac{R}{r}\right) + 12.625\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1.648\left(\frac{R}{r}\right)^3$ $K_{tB} = 81.344 - 99.133\left(\frac{R}{r}\right) + 40.740\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 5.560\left(\frac{R}{r}\right)^3$
5. Angles and box sections   	Torsion	(1) For angle section: $\tau_{\max} = \tau_A = K_t \tau$ $K_t = 6.554 - 16.077\sqrt{\frac{r}{t}} + 16.987\left(\frac{r}{t}\right) - 5.886\sqrt{\frac{r}{t}}\left(\frac{r}{t}\right)$ where $0.1 \le r/t \le 1.4$ (2) For box section: $\tau_{\max} = \tau_B = K_t \tau$ $K_t = 3.962 - 7.359\left(\frac{r}{t}\right) + 6.801\left(\frac{r}{t}\right)^2 - 2.153\left(\frac{r}{t}\right)^3$ where a is 15–20 times larger than t, $0.2 \le r/t \le 1.4$

[a] Much of this material is based on Ref. [6.1].

B Stress-intensiteit vormfactor

AI.2. STRESS INTENSITY FACTOR SOLUTIONS FROM SAQ

AI.2.1 CRACKS IN A PLATE

Description: ***Finite surface crack***

Schematic:

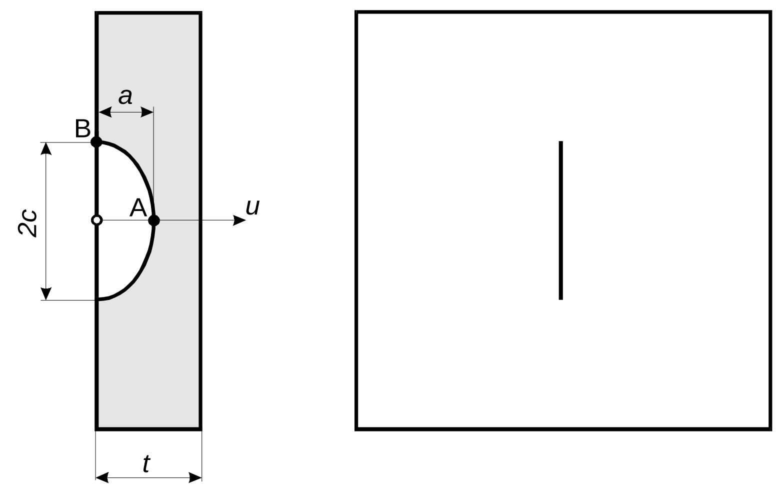


Figure AI.1. Finite surface crack in a plate.

Solution:

The stress intensity factor K_I is given by

$$K_I = \sqrt{pa}\sum_{i=0}^{5} s_i f_i\left(\frac{a}{t},\frac{2c}{a}\right) \qquad \text{(AI.1)}$$

s_i (i = 0 to 5) are stress components which define the stress state s according to

$$s = s(u) = \sum_{i=0}^{5} s_i \left(\frac{u}{a}\right)^i \quad \text{for } 0 \le u \le a \qquad \text{(AI.2)}$$

s is to be taken normal to the prospective crack plane in an uncracked plate. s_i is determined by fitting s to Equation (AI.2). The co-ordinate u is defined in Figure AI.1.

f_i (i = 0 to 5) are geometry functions which are given in Tables AI.1 and AI.2 below for the deepest point of the crack (f^A), and at the intersection of the crack with the free surface (f^B), respectively. The parameters used in the Tables are defined in Figure AI.1.

Table AI.1. Geometry functions for a finite surface crack in a plate - deepest point of the crack.

***2c/a*= 2**						
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_4^A	f_5^A
0	0.659	0.471	0.387	0.337	0.299	0.266
0.2	0.663	0.473	0.388	0.337	0.299	0.269
0.4	0.678	0.479	0.390	0.339	0.300	0.271
0.6	0.692	0.486	0.396	0.342	0.304	0.274
0.8	0.697	0.497	0.405	0.349	0.309	0.278
***2c/a*= 5/2**						
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_4^A	f_5^A
0	0.741	0.510	0.411	0.346	0.300	0.266
0.2	0.746	0.512	0.413	0.352	0.306	0.270
0.4	0.771	0.519	0.416	0.356	0.309	0.278
0.6	0.800	0.531	0.422	0.362	0.317	0.284
0.8	0.820	0.548	0.436	0.375	0.326	0.295
***2c/a*= 10/3**						
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_4^A	f_5^A
0	0.833	0.549	0.425	0.351	0.301	0.267
0.2	0.841	0.554	0.430	0.359	0.309	0.271
0.4	0.885	0.568	0.442	0.371	0.320	0.285
0.6	0.930	0.587	0.454	0.381	0.331	0.295
0.8	0.960	0.605	0.476	0.399	0.346	0.310
***2c/a*= 5**						
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_4^A	f_5^A
0	0.939	0.580	0.434	0.353	0.302	0.268
0.2	0.957	0.595	0.446	0.363	0.310	0.273
0.4	1.057	0.631	0.475	0.389	0.332	0.292
0.6	1.146	0.668	0.495	0.407	0.350	0.309
0.8	1.190	0.698	0.521	0.428	0.367	0.324
***2c/a*= 10**						
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_4^A	f_5^A
0	1.053	0.606	0.443	0.357	0.302	0.269
0.2	1.106	0.640	0.467	0.374	0.314	0.277
0.4	1.306	0.724	0.525	0.420	0.348	0.304
0.6	1.572	0.815	0.571	0.448	0.377	0.327
0.8	1.701	0.880	0.614	0.481	0.399	0.343

Table AI.1. Geometry functions for a finite surface crack in a plate - deepest point of the crack. (Continued)

2c/a = 20						
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_4^A	f_5^A
0	1.103	0.680	0.484	0.398	0.344	0.306
0.2	1.199	0.693	0.525	0.426	0.364	0.323
0.4	1.492	0.806	0.630	0.499	0.417	0.364
0.6	1.999	1.004	0.838	0.631	0.514	0.437
0.8	2.746	1.276	1.549	1.073	0.817	0.660
***2c/a* = 40**						
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_4^A	f_5^A
0	1.120	0.686	0.504	0.419	0.365	0.325
0.2	1.245	0.708	0.553	0.452	0.389	0.346
0.4	1.681	0.881	0.682	0.538	0.451	0.394
0.6	2.609	1.251	0.971	0.722	0.583	0.493
0.8	4.330	1.885	2.016	1.369	1.026	0.819
***2c/a* → ∞**						
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_4^A	f_5^A
0	1.123	0.682	0.524	0.440	0.386	0.344
0.2	1.380	0.784	0.582	0.478	0.414	0.369
0.4	2.106	1.059	0.735	0.578	0.485	0.423
0.6	4.025	1.750	1.105	0.814	0.651	0.548
0.8	11.92	4.437	2.484	1.655	1.235	0.977

Table AI.2. Geometry functions for a finite surface crack in a plate - intersection of crack with free surface.

***2c/a*= 2**						
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_4^B	f_5^B
0	0.716	0.118	0.041	0.022	0.014	0.010
0.2	0.729	0.123	0.045	0.023	0.014	0.010
0.4	0.777	0.133	0.050	0.026	0.015	0.011
0.6	0.839	0.148	0.058	0.029	0.018	0.012
0.8	0.917	0.167	0.066	0.035	0.022	0.015
***2c/a*= 5/2**						
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_4^B	f_5^B
0	0.730	0.124	0.041	0.021	0.013	0.010
0.2	0.749	0.126	0.046	0.023	0.014	0.010
0.4	0.795	0.144	0.054	0.028	0.017	0.012
0.6	0.901	0.167	0.066	0.033	0.021	0.015
0.8	0.995	0.193	0.076	0.042	0.026	0.017
***2c/a*= 10/3**						
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_4^B	f_5^B
0	0.723	0.118	0.039	0.019	0.011	0.008
0.2	0.747	0.125	0.044	0.022	0.014	0.010
0.4	0.803	0.145	0.056	0.029	0.018	0.012
0.6	0.934	0.180	0.072	0.037	0.023	0.016
0.8	1.070	0.218	0.087	0.047	0.029	0.020
***2c/a*= 5**						
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_4^B	f_5^B
0	0.673	0.104	0.032	0.015	0.009	0.006
0.2	0.704	0.114	0.038	0.018	0.011	0.007
0.4	0.792	0.139	0.053	0.027	0.016	0.011
0.6	0.921	0.183	0.074	0.038	0.024	0.017
0.8	1.147	0.244	0.097	0.052	0.032	0.021
***2c/a*= 10**						
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_4^B	f_5^B
0	0.516	0.069	0.017	0.009	0.005	0.004
0.2	0.554	0.076	0.022	0.011	0.007	0.005
0.4	0.655	0.099	0.039	0.019	0.012	0.008
0.6	0.840	0.157	0.063	0.032	0.020	0.013
0.8	1.143	0.243	0.099	0.055	0.034	0.023

Table AI.2. Geometry functions for a finite surface crack in a plate - intersection of crack with free surface (continued).

***2c/a* = 20**						
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_4^B	f_5^B
0	0.384	0.067	0.009	0.004	0.003	0.002
0.2	0.422	0.074	0.011	0.006	0.004	0.003
0.4	0.546	0.096	0.020	0.010	0.006	0.004
0.6	0.775	0.136	0.031	0.016	0.010	0.007
0.8	1.150	0.202	0.050	0.028	0.017	0.011
***2c/a* = 40**						
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_4^B	f_5^B
0	0.275	0.048	0.004	0.002	0.001	0.001
0.2	0.310	0.054	0.006	0.003	0.002	0.001
0.4	0.435	0.075	0.010	0.005	0.003	0.002
0.6	0.715	0.124	0.016	0.008	0.005	0.003
0.8	1.282	0.221	0.025	0.014	0.009	0.006
***2c/a*→ ∞**						
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_4^B	f_5^B
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Remarks: The plate should be large in comparison to the length of the crack so that edge effects do not influence the results.
Taken from References AI.2, AI.3 and AI.7.

Description: ***Infinite surface crack***

Schematic:

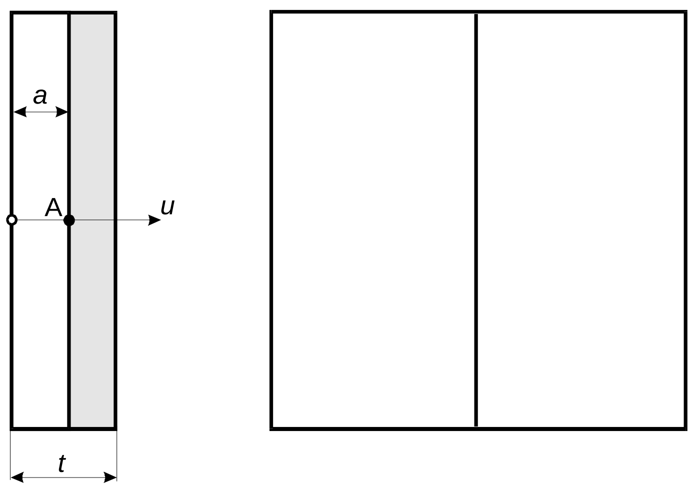


Figure AI.2. Infinite surface crack in a plate.

Solution:

The stress intensity factor K_I is given by

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{2pa}} \int_0^a s(u) \sum_{i=1}^{i=5} f_i(a/t) \left(1 - \frac{u}{a}\right)^{i-\frac{3}{2}} du \qquad \text{(AI.3)}$$

The stress state $s = s(u)$ is to be taken normal to the prospective crack plane in an uncracked plate. The co-ordinate u is defined in Figure AI.2.

The geometry functions f_i (i = 1 to 5) are given in Table AI.3 for the deepest point of the crack (f^A). Parameters used in the Table are defined in Figure AI.2.

Table AI.3. Geometry functions for an infinite surface crack in a plate.

a/t	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_4^A	f_5^A
0	2.000	0.977	1.142	-0.350	-0.091
0.1	2.000	1.419	1.138	-0.355	-0.076
0.2	2.000	2.537	1.238	-0.347	-0.056
0.3	2.000	4.238	1.680	-0.410	-0.019
0.4	2.000	6.636	2.805	-0.611	0.039
0.5	2.000	10.02	5.500	-1.340	0.218
0.6	2.000	15.04	11.88	-3.607	0.786
0.7	2.000	23.18	28.03	-10.50	2.587
0.8	2.000	38.81	78.75	-36.60	9.871
0.9	2.000	82.70	351.0	-207.1	60.86

Remarks: The plate should be large in the transverse direction to the crack so that edge effects do not influence the results.
Taken from Reference AI.4.

Description: ***Embedded crack***

Schematic:

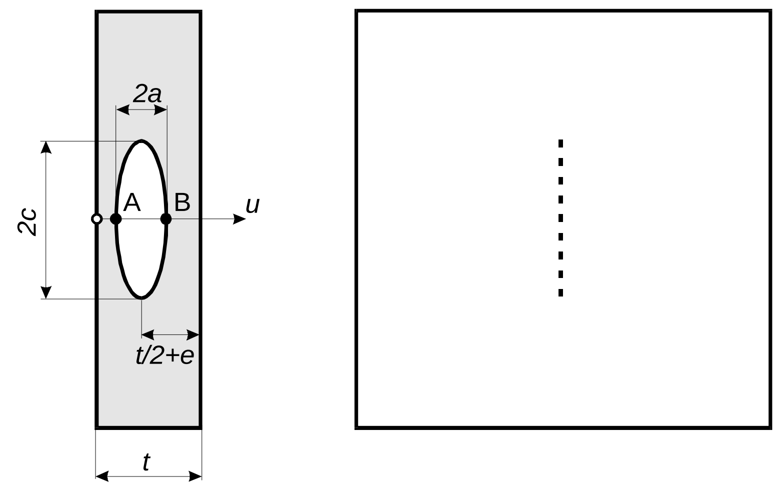


Figure AI.3. Embedded crack in a plate.

Solution:

The stress intensity factor K_I is given by

$$K_I = \sqrt{pa}\left(s_m f_m\left(\frac{2a}{t},\frac{c}{a},\frac{e}{t}\right) + s_b f_b\left(\frac{2a}{t},\frac{c}{a},\frac{e}{t}\right)\right) \qquad \text{(AI.4)}$$

In Equation (AI.4), s_m and s_b are the membrane and bending stress components respectively, which define the stress state s according to

$$s = s(u) = s_m + s_b\left(1 - \frac{2u}{t}\right) \quad \text{for } 0 \le u \le t \qquad \text{(AI.5)}$$

The stress s is to be taken normal to the prospective crack plane in an uncracked plate. s_m and s_b are determined by fitting s to Equation (AI.5). The co-ordinate u is defined in Figure AI.3.

The geometry functions f_m and f_b are given in Tables AI.4 and AI.5 for points A and B respectively, see Figure AI.3.

Table AI.4. Geometry functions for an embedded crack in a plate at point A which is closest to u = 0.

***c/a*= 1**						
	***e/t* = 0**		***e/t* = 0.15**		***e/t* = 0.3**	
2*a/t*	f_m^A	f_b^A	f_m^A	f_b^A	f_m^A	f_b^A
0	0.638	0.000	0.638	0.191	0.638	0.383
0.2	0.649	0.087	0.659	0.286	0.694	0.509
0.4	0.681	0.182	0.725	0.411	-	-
0.6	0.739	0.296	0.870	0.609	-	-
***c/a*= 2**						
	***e/t* = 0**		***e/t* = 0.15**		***e/t* = 0.3**	
2*a/t*	f_m^A	f_b^A	f_m^A	f_b^A	f_m^A	f_b^A
0	0.824	0.000	0.824	0.247	0.824	0.494
0.2	0.844	0.098	0.862	0.359	0.932	0.668
0.4	0.901	0.210	0.987	0.526	-	-
0.6	1.014	0.355	1.332	0.866	-	-
***c/a*= 4**						
	***e/t* = 0**		***e/t* = 0.15**		***e/t* = 0.3**	
2*a/t*	f_m^A	f_b^A	f_m^A	f_b^A	f_m^A	f_b^A
0	0.917	0.000	0.917	0.275	0.917	0.550
0.2	0.942	0.102	0.966	0.394	1.058	0.749
0.4	1.016	0.220	1.129	0.584	-	-
0.6	1.166	0.379	1.655	1.034	-	-
***c/a*= ∞**						
	***e/t* = 0**		***e/t* = 0.15**		***e/t* = 0.3**	
2*a/t*	f_m^A	f_b^A	f_m^A	f_b^A	f_m^A	f_b^A
0	1.010	0.000	1.010	0.303	1.010	0.606
0.2	1.041	0.104	1.071	0.428	1.189	0.833
0.4	1.133	0.227	1.282	0.641	-	-
0.6	1.329	0.399	2.093	1.256	-	-

Table AI.5. Geometry functions for an embedded crack in a plate at point B furthest from u = 0.

***c/a*= 1**						
	***e/t* = 0**		***e/t* = 0.15**		***e/t* = 0.3**	
2*a/t*	f_m^B	f_b^B	f_m^B	f_b^B	f_m^B	f_b^B
0	0.638	0.000	0.638	0.191	0.638	0.383
0.2	0.649	-0.087	0.646	0.108	0.648	0.303
0.4	0.681	-0.182	0.668	0.022	-	-
0.6	0.739	-0.296	0.705	-0.071	-	-
***c/a*= 2**						
	***e/t* = 0**		***e/t* = 0.15**		***e/t* = 0.3**	
2*a/t*	f_m^B	f_b^B	f_m^B	f_b^B	f_m^B	f_b^B
0	0.824	0.000	0.824	0.247	0.824	0.494
0.2	0.844	-0.098	0.844	0.155	0.866	0.418
0.4	0.901	-0.210	0.902	0.060	-	-
0.6	1.014	-0.355	1.016	-0.051	-	-
***c/a*= 4**						
	***e/t* = 0**		***e/t* = 0.15**		***e/t* = 0.3**	
2*a/t*	f_m^B	f_b^B	f_m^B	f_b^B	f_m^B	f_b^B
0	0.917	0.000	0.917	0.275	0.917	0.550
0.2	0.942	-0.102	0.945	0.181	0.980	0.482
0.4	1.016	-0.220	1.029	0.086	-	-
0.6	1.166	-0.379	1.206	-0.030	-	-
***c/a*→ ∞**						
	***e/t* = 0**		***e/t* = 0.15**		***e/t* = 0.3**	
2*a/t*	f_m^B	f_b^B	f_m^B	f_b^B	f_m^B	f_b^B
0	1.010	0.000	1.010	0.303	1.010	0.606
0.2	1.041	-0.104	1.048	0.210	1.099	0.550
0.4	1.133	-0.227	1.162	0.166	-	-
0.6	1.329	-0.399	1.429	0.000	-	-

Remarks: The plate should be large in comparison to the length of the crack so that edge effects do not influence the results.
Taken from Reference AI.5.

Description: ***Through-thickness crack***

Schematic:

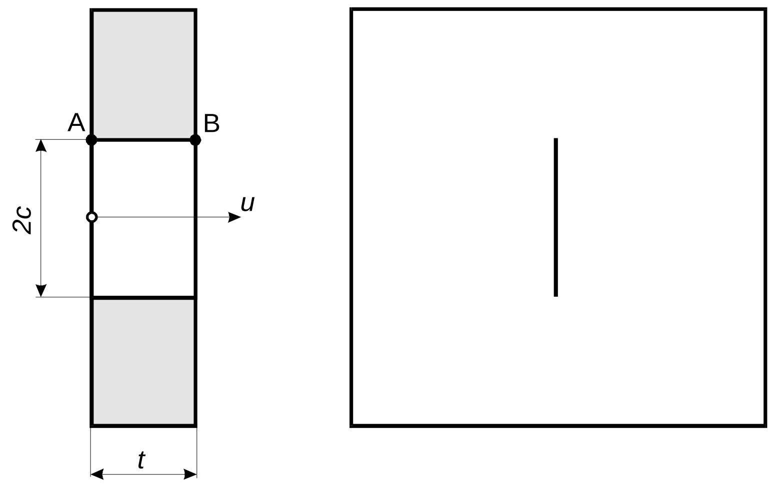


Figure AI.4. Through-thickness crack in a plate.

Solution:

The stress intensity factor K_I is given by

$$K_I = \sqrt{pc}\left(s_m f_m + s_b f_b\right)$$

In Equation (AI.6), s_m and s_b are the membrane and bending stress components respectively, which define the stress state s according to

$$s = s(u) = s_m + s_b\left(1 - \frac{2u}{t}\right) \quad \text{for } 0 \le u \le t \tag{AI.7}$$

s is to be taken normal to the prospective crack plane in an uncracked plate. s_m and s_b are determined by fitting s to Equation (AI.7). The co-ordinate u is defined in Figure AI.4.

The geometry functions f_m and f_b are given in Table AI.6 for points at the intersections of the crack with the free surface at u = 0 (A) and at u = t (B), see Figure AI.4.

Table AI.6. Geometry functions for a through-thickness crack in a plate.

f_m^A	f_b^A	f_m^B	f_b^B
1.000	1.000	1.000	-1.000

Remarks: The plate should be large in comparison to the length of the crack so that edge effects do not influence the results.
Taken from Reference AI.6.

AI.2.2. AXIAL CRACKS IN A CYLINDER

Description: ***Finite internal surface crack***

Schematic:

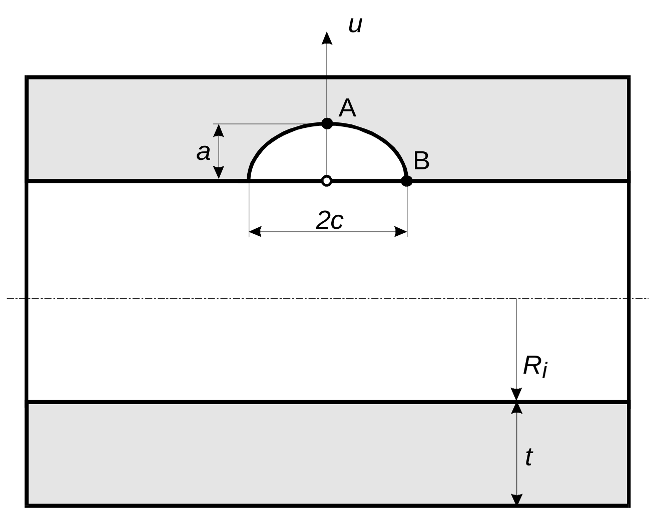


Figure AI.5. Finite axial internal surface crack in a cylinder.

Solution:

The stress intensity factor K_I is given by

$$K_I = \sqrt{pa} \sum_{i=0}^{3} s_i f_i \left(\frac{a}{t}, \frac{2c}{a}, \frac{R_i}{t} \right) \qquad \text{(AI.8)}$$

s_i (i = 0 to 3) are stress components which define the stress state s according to

$$s = s(u) = \sum_{i=0}^{3} s_i \left(\frac{u}{a} \right)^i \qquad \text{for } 0 \le u \le a \qquad \text{(AI.9)}$$

s is to be taken normal to the prospective crack plane in an uncracked cylinder. s_i is determined by fitting s to Equation (AI.9). The co-ordinate u is defined in Figure AI.5.

The geometry functions f_i (i = 0 to 3) are given in Tables AI.7 and AI.8 for the deepest point of the crack (A) and at the intersection of the crack with the free surface (B) respectively, see Figure AI.5.

Table AI.7. Geometry functions for a finite axial internal surface crack in a cylinder at point *A*.

$2c/a = 2,\ R_i/t = 4$				
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	0.659	0.471	0.387	0.337
0.2	0.643	0.454	0.375	0.326
0.5	0.663	0.463	0.378	0.328
0.8	0.704	0.489	0.397	0.342
$2c/a = 2,\ R_i/t = 10$				
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	0.659	0.471	0.387	0.337
0.2	0.647	0.456	0.375	0.326
0.5	0.669	0.464	0.380	0.328
0.8	0.694	0.484	0.394	0.339
$2c/a = 5,\ R_i/t = 4$				
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	0.939	0.580	0.434	0.353
0.2	0.919	0.579	0.452	0.382
0.5	1.037	0.622	0.474	0.395
0.8	1.255	0.720	0.534	0.443
$2c/a = 5,\ R_i/t = 10$				
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	0.939	0.580	0.434	0.353
0.2	0.932	0.584	0.455	0.383
0.5	1.058	0.629	0.477	0.397
0.8	1.211	0.701	0.523	0.429
$2c/a = 10,\ R_i/t = 4$				
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	1.053	0.606	0.443	0.357
0.2	1.045	0.634	0.487	0.406
0.5	1.338	0.739	0.540	0.438
0.8	1.865	0.948	0.659	0.516
$2c/a = 10,\ R_i/t = 10$				
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	1.053	0.606	0.443	0.357
0.2	1.062	0.641	0.489	0.417
0.5	1.359	0.746	0.544	0.440
0.8	1.783	0.914	0.639	0.504

Table AI.8. Geometry functions for a finite axial internal surface crack in a cylinder at point B.

***2c/a*= 2, R_i/t = 4**				
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B
0	0.716	0.118	0.041	0.022
0.2	0.719	0.124	0.046	0.024
0.5	0.759	0.136	0.052	0.027
0.8	0.867	0.158	0.062	0.032
***2c/a*= 2, R_i/t = 10**				
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B
0	0.716	0.118	0.041	0.022
0.2	0.726	0.126	0.047	0.024
0.5	0.777	0.141	0.054	0.028
0.8	0.859	0.163	0.063	0.033
***2c/a*= 5, R_i/t = 4**				
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B
0	0.673	0.104	0.032	0.016
0.2	0.670	0.107	0.037	0.018
0.5	0.803	0.151	0.059	0.031
0.8	1.060	0.229	0.095	0.051
***2c/a*= 5, R_i/t = 10**				
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B
0	0.673	0.104	0.032	0.015
0.2	0.676	0.109	0.037	0.018
0.5	0.814	0.153	0.060	0.031
0.8	1.060	0.225	0.092	0.049
***2c/a*= 10, R_i/t = 4**				
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B
0	0.516	0.069	0.017	0.009
0.2	0.577	0.075	0.022	0.010
0.5	0.759	0.134	0.051	0.027
0.8	1.144	0.250	0.103	0.056
***2c/a*= 10, R_i/t = 10**				
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B
0	0.516	0.069	0.017	0.009
0.2	0.578	0.075	0.022	0.010
0.5	0.753	0.131	0.050	0.026
0.8	1.123	0.241	0.099	0.053

Remarks: The cylinder should be long in comparison to the length of the crack so that edge effects do not influence the results.
Taken from References AI.3 and AI.7.

Description: ***Infinite internal surface crack***

Schematic:

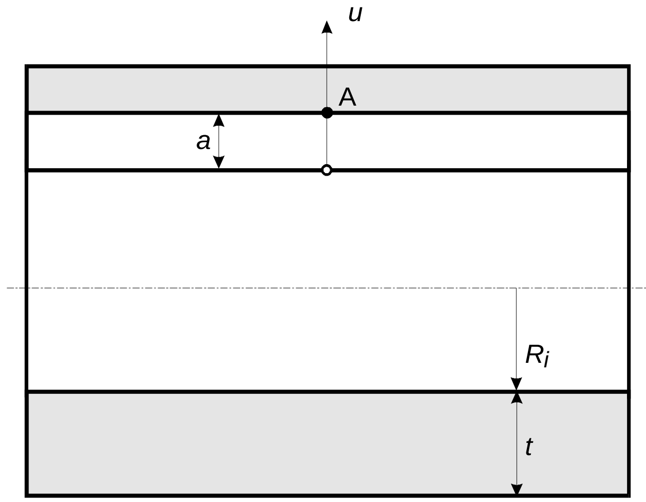


Figure AI.6. Infinite axial internal surface crack in a cylinder.

Solution:

The stress intensity factor K_I is given by

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{2pa}} \int_0^a s(u) \sum_{i=1}^{i=3} f_i(a/t, R_i/t) \left(1 - \frac{u}{a}\right)^{i-\frac{3}{2}} du \qquad \text{(AI.10)}$$

The stress state $s = s(u)$ is to be taken normal to the prospective crack plane in an uncracked cylinder. The co-ordinate u is defined in Figure AI.6.

The geometry functions f_i (i = 1 to 3) are given in Table AI.9 for the deepest point of the crack (A), see Figure AI.6.

Table AI.9. Geometry functions for an infinite axial internal surface crack in a cylinder.

	$R_i/t = 0.5$			$R_i/t = 1$		
a/t	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	2.000	1.328	0.220	2.000	1.336	0.220
0.1	2.000	0.890	0.155	2.000	1.271	0.184
0.2	2.000	0.895	0.193	2.000	1.566	0.237
0.3	2.000	1.032	0.252	2.000	1.997	0.360
0.4	2.000	1.329	0.210	2.000	2.501	0.542
0.5	2.000	1.796	0.093	2.000	3.072	0.762
0.6	2.000	2.457	-0.074	2.000	3.807	0.892
0.7	2.000	3.597	-0.618	2.000	4.877	0.825
0.75	2.000	4.571	-1.272	2.000	5.552	0.786
	$R_i/t = 2$			$R_i/t = 4$		
a/t	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	2.000	1.340	0.219	2.000	1.340	0.219
0.1	2.000	1.519	0.212	2.000	1.659	0.217
0.2	2.000	2.119	0.322	2.000	2.475	0.358
0.3	2.000	2.934	0.551	2.000	3.615	0.709
0.4	2.000	3.820	1.066	2.000	4.982	1.499
0.5	2.000	4.692	1.853	2.000	6.455	2.936
0.6	2.000	5.697	2.600	2.000	7.977	5.018
0.7	2.000	6.995	3.224	2.000	9.513	7.637
0.75	2.000	7.656	3.733	2.000	10.24	9.134

Remarks: Taken from Reference AI.4.

Description: ***Finite external surface crack***

Schematic:

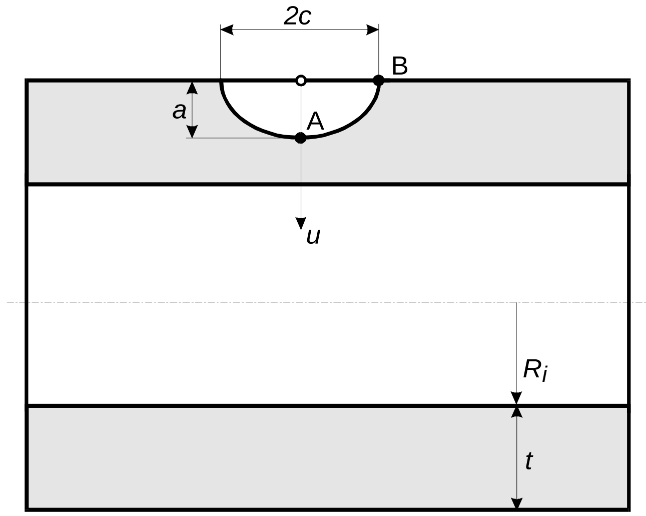


Figure AI.7. **Finite axial external surface crack in a cylinder.**

Solution:

The stress intensity factor K_{I} is given by

$$K_I = \sqrt{pa}\sum_{i=0}^{3} s_i f_i\left(\frac{a}{t}, \frac{2c}{a}, \frac{R_i}{t}\right) \tag{AI.11}$$

s_i (i = 0 to 3) are stress components which define the stress state s according to

$$s = s(u) = \sum_{i=0}^{3} s_i \left(\frac{u}{a}\right)^i \qquad \text{for } 0 \le u \le a \tag{AI.12}$$

s is to be taken normal to the prospective crack plane in an uncracked cylinder. s_i is determined by fitting s to Equation (AI.12). The co-ordinate u is defined in Figure AI.7.

f_i (i = 0 to 3) are geometry functions which are given in Tables AI.10 and AI.11 for the deepest point of the crack (A), and at the intersection of the crack with the free surface (B), respectively, see Figure AI.7.

Table AI.10. Geometry functions at point A for a finite axial external surface crack in a cylinder.

$2c/a = 2$, $R_i/t = 4$				
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	0.659	0.471	0.387	0.337
0.2	0.656	0.459	0.377	0.327
0.5	0.697	0.473	0.384	0.331
0.8	0.736	0.495	0.398	0.342
$2c/a = 2$, $R_i/t = 10$				
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	0.659	0.471	0.387	0.337
0.2	0.653	0.457	0.376	0.327
0.5	0.687	0.470	0.382	0.330
0.8	0.712	0.487	0.394	0.340
$2c/a = 5$, $R_i/t = 4$				
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	0.939	0.580	0.434	0.353
0.2	0.964	0.596	0.461	0.387
0.5	1.183	0.672	0.500	0.410
0.8	1.502	0.795	0.568	0.455
$2c/a = 5$, $R_i/t = 10$				
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	0.939	0.580	0.434	0.353
0.2	0.953	0.591	0.459	0.386
0.5	1.139	0.656	0.491	0.405
0.8	1.361	0.746	0.543	0.439
$2c/a = 10$, $R_i/t = 4$				
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	1.053	0.606	0.443	0.357
0.2	1.107	0.658	0.499	0.413
0.5	1.562	0.820	0.584	0.465
0.8	2.390	1.122	0.745	0.568
$2c/a = 10$, $R_i/t = 10$				
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	1.053	0.606	0.443	0.357
0.2	1.092	0.652	0.496	0.411
0.5	1.508	0.799	0.571	0.457
0.8	2.188	1.047	0.704	0.541

Table AI.11. Geometry functions at point B for a finite axial external surface crack in a cylinder.

$2c/a = 2,\ R_i/t = 4$				
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B
0	0.716	0.118	0.041	0.022
0.2	0.741	0.130	0.049	0.026
0.5	0.819	0.155	0.061	0.033
0.8	0.954	0.192	0.078	0.041
$2c/a = 2,\ R_i/t = 10$				
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B
0	0.716	0.118	0.041	0.022
0.2	0.736	0.129	0.048	0.025
0.5	0.807	0.150	0.059	0.031
0.8	0.926	0.182	0.072	0.038
$2c/a = 5,\ R_i/t = 4$				
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B
0	0.673	0.104	0.032	0.015
0.2	0.690	0.113	0.039	0.019
0.5	0.864	0.170	0.068	0.036
0.8	1.217	0.277	0.117	0.064
$2c/a = 5,\ R_i/t = 10$				
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B
0	0.673	0.104	0.032	0.015
0.2	0.685	0.111	0.039	0.019
0.5	0.856	0.167	0.066	0.035
0.8	1.198	0.269	0.112	0.061
$2c/a = 10,\ R_i/t = 4$				
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B
0	0.516	0.069	0.017	0.009
0.2	0.583	0.076	0.022	0.010
0.5	0.748	0.128	0.047	0.024
0.8	1.105	0.230	0.092	0.049
$2c/a = 10,\ R_i/t = 10$				
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B
0	0.516	0.069	0.017	0.009
0.2	0.583	0.076	0.022	0.010
0.5	0.768	0.135	0.051	0.027
0.8	1.202	0.264	0.109	0.059

Remarks: The cylinder should be long in comparison to the length of the crack so that edge effects do not influence the results.
Taken from Reference AI.3 and AI.7.

Description: ***Infinite external surface crack***

Schematic:

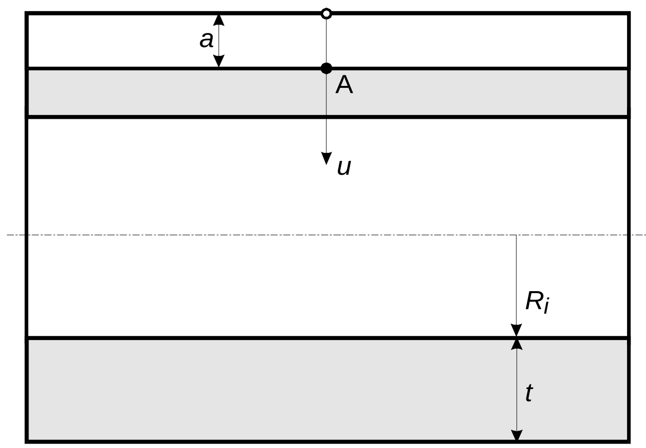


Figure AI.8. Infinite axial external surface crack in a cylinder.

Solution:

The stress intensity factor K_I is given by

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{2pa}} \int_0^a s(u) \sum_{i=1}^{i=4} f_i(a/t, R_i/t) \left(1 - \frac{u}{a}\right)^{i-\frac{3}{2}} du \qquad \text{(AI.13)}$$

The stress state $s = s(u)$ is to be taken normal to the prospective crack plane in an uncracked cylinder. The co-ordinate u is defined in Figure AI.8.

f_i (i = 1 to 4) are geometry functions which are given in Table AI.12 for the deepest point of the crack (A). See Figure AI.8.

Table AI.12. Geometry functions for an infinite axial external surface crack in a cylinder.

a/t	$R_i/t = 0.5$				$R_i/t = 1$			
	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_4^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_4^A
0	2.000	0.901	1.401	-0.620	2.000	0.901	1.401	-0.620
0.1	2.000	1.359	1.376	-0.585	2.000	1.331	1.365	-0.584
0.2	2.000	1.933	1.387	-0.549	2.000	1.967	1.369	-0.543
0.3	2.000	2.614	1.422	-0.510	2.000	2.766	1.484	-0.512
0.4	2.000	3.408	1.541	-0.481	2.000	3.708	1.759	-0.505
0.5	2.000	4.321	1.799	-0.472	2.000	4.787	2.238	-0.528
0.6	2.000	5.459	2.101	-0.456	2.000	6.055	2.904	-0.577
0.7	2.000	7.145	2.187	-0.361	2.000	7.726	3.601	-0.605
0.75	2.000	8.355	2.112	-0.265	2.000	8.853	3.901	-0.590
a/t	$R_i/t = 2$				$R_i/t = 4$			
	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_4^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_4^A
0	2.000	0.901	1.401	-0.620	2.000	0.900	1.400	-0.620
0.1	2.000	1.330	1.370	-0.585	2.000	1.335	1.382	-0.587
0.2	2.000	2.086	1.403	-0.542	2.000	2.219	1.416	-0.535
0.3	2.000	3.095	1.580	-0.510	2.000	3.464	1.658	-0.501
0.4	2.000	4.307	2.054	-0.524	2.000	4.993	2.412	-0.549
0.5	2.000	5.643	3.004	-0.625	2.000	6.823	3.794	-0.704
0.6	2.000	7.103	4.376	-0.802	2.000	8.984	6.051	-1.011
0.7	2.000	8.976	5.735	-0.949	2.000	11.10	10.07	-1.674
0.75	2.000	10.28	6.243	-0.963	2.000	11.80	13.08	-2.229

Remarks: Taken from Reference AI.2.

AI.2.3. CIRCUMFERENTIAL CRACKS IN A CYLINDER

Description: ***Part circumferential internal surface crack***

Schematic:

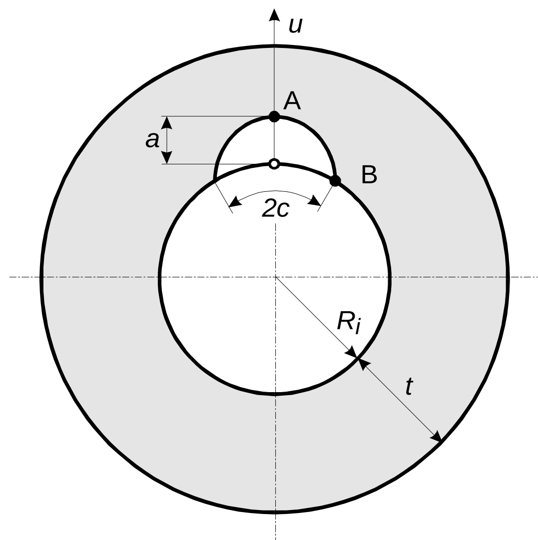


Figure AI.9. Part circumferential internal surface crack in a cylinder.

Solution:

The stress intensity factor K_I is given by

$$K_I = \sqrt{pa}\left(\sum_{i=0}^{3} s_i f_i\left(\frac{a}{t}, \frac{2c}{a}, \frac{R_i}{t}\right) + s_{bg} f_{bg}\left(\frac{a}{t}, \frac{2c}{a}, \frac{R_i}{t}\right)\right) \tag{AI.14}$$

s_i (i = 0 to 3) are stress components which define the axisymmetric stress state s according to

$$s = s(u) = \sum_{i=0}^{3} s_i \left(\frac{u}{a}\right)^i \qquad \text{for } 0 \le u \le a \tag{AI.15}$$

and s_{bg} is the global bending stress, i.e. the maximum outer fibre bending stress. s and s_{bg} are to be taken normal to the prospective crack plane in an uncracked cylinder. s_i is determined by fitting s to Equation (AI.15). The co-ordinate u is defined in Figure AI.9. It should be noted that the solution for global bending stress assumes that the crack is symmetrically positioned about the global bending axis as shown in Figure AI.9. f_i (i = 0 to 3) and f_{bg} are geometry functions which are given in Tables AI.13 and AI.14 for the deepest point of the crack (A), and at the intersection of the crack with the free surface (B), respectively, see Figure AI.9.

Table AI.13. Geometry functions at point A for a part circumferential internal surface crack in a cylinder.

***2c/a*= 2, R_i/t = 5**					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	0.659	0.471	0.387	0.337	0.549
0.2	0.665	0.460	0.371	0.316	0.570
0.4	0.682	0.471	0.381	0.327	0.600
0.6	0.700	0.481	0.390	0.335	0.632
0.8	0.729	0.506	0.410	0.352	0.675
***2c/a*= 2, R_i/t = 10**					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	0.659	0.471	0.387	0.337	0.599
0.2	0.664	0.459	0.370	0.315	0.613
0.4	0.680	0.469	0.379	0.325	0.636
0.6	0.696	0.478	0.387	0.333	0.659
0.8	0.714	0.497	0.403	0.347	0.685
***2c/a*= 4, R_i/t = 5**					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	0.886	0.565	0.430	0.352	0.738
0.2	0.890	0.556	0.424	0.347	0.761
0.4	0.934	0.576	0.440	0.362	0.817
0.6	0.991	0.602	0.457	0.377	0.885
0.8	1.066	0.653	0.496	0.409	0.973
***2c/a*= 4, R_i/t = 10**					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	0.886	0.565	0.430	0.352	0.806
0.2	0.895	0.557	0.424	0.347	0.825
0.4	0.947	0.580	0.441	0.363	0.883
0.6	1.008	0.605	0.458	0.377	0.950
0.8	1.482	0.647	0.492	0.406	1.012
***2c/a*= 8, R_i/t = 5**					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	1.025	0.600	0.441	0.356	0.854
0.2	1.041	0.625	0.469	0.381	0.890
0.4	1.142	0.666	0.496	0.403	0.995
0.6	1.274	0.718	0.527	0.427	1.126
0.8	1.463	0.813	0.589	0.471	1.310

Table AI.13. Geometry functions at point A for a part circumferential internal surface crack in a cylinder. (Continued)

$2c/a$= 8, R_i/t = 10					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	1.025	0.600	0.441	0.356	0.931
0.2	1.053	0.629	0.471	0.382	0.970
0.4	1.180	0.678	0.502	0.407	1.097
0.6	1.335	0.737	0.536	0.431	1.253
0.8	1.482	0.814	0.587	0.469	1.402
$2c/a$= 16, R_i/t = 5					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	1.079	0.635	0.473	0.388	0.899
0.2	1.130	0.665	0.493	0.398	0.964
0.4	1.294	0.732	0.537	0.433	1.120
0.6	1.521	0.820	0.587	0.468	1.321
0.8	1.899	0.987	0.690	0.541	1.633
$2c/a$= 16, R_i/t = 10					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	1.079	0.635	0.473	0.388	0.981
0.2	1.150	0.672	0.498	0.401	1.059
0.4	1.366	0.756	0.549	0.441	1.267
0.6	1.643	0.859	0.606	0.479	1.531
0.8	1.972	1.002	0.694	0.541	1.842
$2c/a$= 32, R_i/t = 5					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	1.101	0.658	0.499	0.413	0.918
0.2	1.180	0.690	0.512	0.414	1.004
0.4	1.521	0.775	0.564	0.453	1.188
0.6	1.707	0.902	0.638	0.505	1.430
0.8	2.226	1.137	0.783	0.609	1.794
$2c/a$= 32, R_i/t = 10					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	1.101	0.658	0.499	0.413	1.001
0.2	1.209	0.701	0.518	0.418	1.112
0.4	1.490	0.810	0.582	0.464	1.377
0.6	1.887	0.958	0.665	0.520	1.737
0.8	2.444	1.187	0.799	0.613	2.219

Table AI.14. Geometry functions at point B for a part circumferential internal surface crack in a cylinder.

***2c/a*= 2, R_i/t = 5**					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.718	0.117	0.041	0.020	0.598
0.2	0.746	0.125	0.046	0.023	0.625
0.4	0.774	0.133	0.051	0.026	0.652
0.6	0.882	0.147	0.058	0.031	0.696
0.8	0.876	0.161	0.064	0.034	0.746
***2c/a*= 2, R_i/t = 10**					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.716	0.116	0.041	0.020	0.652
0.2	0.747	0.125	0.046	0.023	0.682
0.4	0.778	0.134	0.051	0.026	0.712
0.6	0.831	0.148	0.058	0.031	0.763
0.8	0.890	0.163	0.064	0.033	0.820
***2c/a*= 4, R_i/t = 5**					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.664	0.091	0.029	0.013	0.555
0.2	0.716	0.108	0.039	0.019	0.599
0.4	0.768	0.125	0.049	0.025	0.643
0.6	0.852	0.152	0.062	0.033	0.712
0.8	0.944	0.179	0.075	0.040	0.788
***2c/a*= 4, R_i/t = 10**					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.657	0.089	0.030	0.014	0.598
0.2	0.719	0.109	0.040	0.020	0.656
0.4	0.781	0.129	0.050	0.026	0.714
0.6	0.883	0.160	0.066	0.035	0.809
0.8	0.995	0.191	0.079	0.042	0.913
***2c/a*= 8, R_i/t = 5**					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.541	0.054	0.014	0.004	0.461
0.2	0.598	0.072	0.023	0.010	0.496
0.4	0.655	0.090	0.032	0.016	0.531
0.6	0.737	0.116	0.045	0.023	0.576
0.8	0.846	0.151	0.062	0.033	0.634

Table AI.14. Geometry functions at point B for a part circumferential internal surface crack in a cylinder. (Continued)

***2c/a*= 8, R_i/t = 10**					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.527	0.047	0.010	0.002	0.481
0.2	0.602	0.072	0.023	0.010	0.547
0.4	0.677	0.097	0.036	0.018	0.613
0.6	0.788	0.131	0.052	0.027	0.710
0.8	0.927	0.172	0.070	0.037	0.829
***2c/a*= 16, R_i/t = 5**					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.417	0.027	0.004	0.000	0.381
0.2	0.447	0.037	0.009	0.003	0.357
0.4	0.477	0.047	0.014	0.006	0.333
0.6	0.528	0.062	0.021	0.010	0.292
0.8	0.600	0.085	0.032	0.017	0.236
***2c/a*= 16, R_i/t = 10**					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.413	0.025	0.003	0.000	0.387
0.2	0.455	0.039	0.010	0.004	0.411
0.4	0.497	0.053	0.017	0.008	0.435
0.6	0.568	0.073	0.026	0.013	0.475
0.8	0.670	0.104	0.041	0.021	0.531
***2c/a*= 32, R_i/t = 5**					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.276	0.010	0.000	0.000	0.313
0.2	0.294	0.014	0.002	0.000	0.200
0.4	0.312	0.018	0.004	0.001	0.087
0.6	0.331	0.023	0.006	0.003	0.056
0.8	0.348	0.026	0.009	0.003	0.276
***2c/a*= 32, R_i/t = 10**					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.275	0.009	0.001	0.000	0.276
0.2	0.298	0.015	0.003	0.000	0.258
0.4	0.321	0.021	0.005	0.002	0.240
0.6	0.352	0.028	0.009	0.004	0.200
0.8	0.389	0.038	0.012	0.006	0.139

Remarks: The cylinder should be long in the transverse direction to the crack so that edge effects do not influence the results.
Taken from Reference AI.3 and AI.9.

Description: ***Complete circumferential internal surface crack***

Schematic:

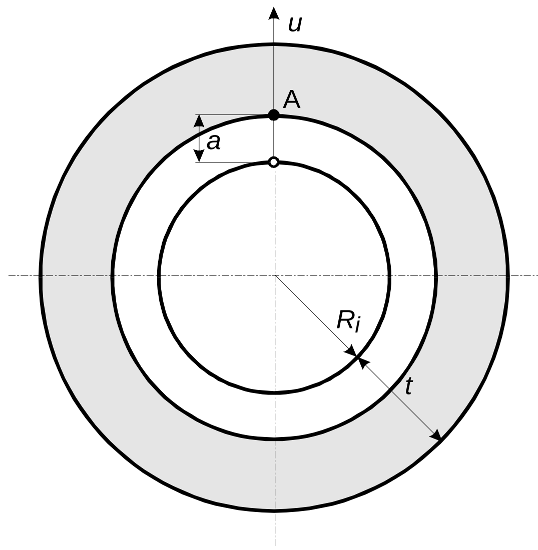


Figure AI.10. Complete circumferential internal surface crack in a cylinder.

Solution:

The stress intensity factor K_I is given by

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_0^a \sigma(u) \sum_{i=1}^{i=3} f_i(a/t, R_i/t) \left(1 - \frac{u}{a}\right)^{i-\frac{3}{2}} du \qquad \text{(AI.16)}$$

The stress state $\sigma = \sigma(u)$ is to be taken normal to the prospective crack plane in an uncracked cylinder. The co-ordinate u is defined in Figure AI.10.

f_i (i = 1 to 3) are geometry functions which are given in Table AI.15 for the deepest point of the crack (A). See Figure AI.10.

Table AI.15. Geometry functions for a complete circumferential internal surface crack in a cylinder.

	R_i/t = 7/3		
a/t	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	2.000	1.327	0.218
0.1	2.000	1.337	0.200
0.2	2.000	1.543	0.201
0.3	2.000	1.880	0.228
0.4	2.000	2.321	0.293
0.5	2.000	2.879	0.373
0.6	2.000	3.720	0.282
	R_i/t = 5		
a/t	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	2.000	1.336	0.218
0.1	2.000	1.460	0.206
0.2	2.000	1.839	0.241
0.3	2.000	2.359	0.353
0.4	2.000	2.976	0.556
0.5	2.000	3.688	0.837
0.6	2.000	4.598	1.086
	R_i/t = 10		
a/t	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	2.000	1.346	0.219
0.1	2.000	1.591	0.211
0.2	2.000	2.183	0.279
0.3	2.000	2.966	0.518
0.4	2.000	3.876	0.956
0.5	2.000	4.888	1.614
0.6	2.000	5.970	2.543

Remarks: The cylinder should be long in the transverse direction to the crack so that edge effects do not influence the results.
Taken from Reference AI.4.

Description: ***Part circumferential external surface crack***

Schematic:

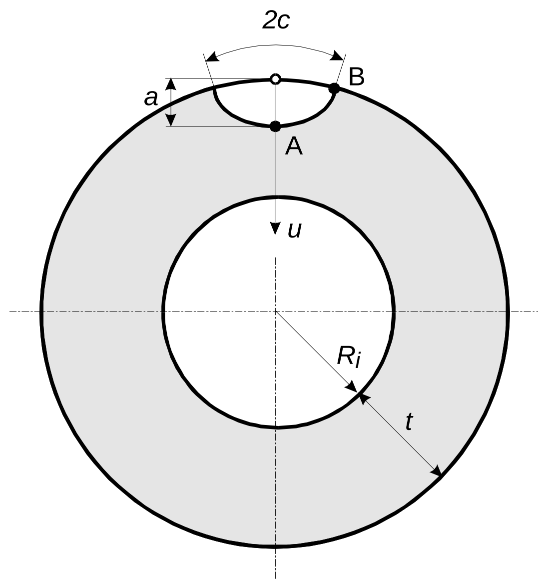


Figure AI.11. Part circumferential external surface crack in a cylinder.

Solution:

The stress intensity factor K_I is given by

$$K_I = \sqrt{pa}\left(\sum_{i=0}^{3} s_i\, f_i\left(\frac{a}{t}, \frac{2c}{a}, \frac{R_i}{t}\right) + s_{bg}\, f_{bg}\left(\frac{a}{t}, \frac{2c}{a}, \frac{R_i}{t}\right)\right) \qquad \text{(AI.17)}$$

s_i (i = 0 to 3) are stress components which define the axisymmetric stress state s according to

$$s = s(u) = \sum_{i=0}^{3} s_i \left(\frac{u}{a}\right)^i \qquad \text{for } 0 \le u \le a \qquad \text{(AI.18)}$$

and s_{bg} is the global bending stress, i.e. the maximum outer fibre bending stress. s and s_{bg} are to be taken normal to the prospective crack plane in an uncracked cylinder. s_i is determined by fitting s to Equation (AI.18). The co-ordinate u is defined in Figure AI.11. It should be noted that the solution for global bending stress assumes that the crack is symmetrically positioned about the global bending axis as shown in Figure AI.11. f_i (i = 0 to 3) and f_{bg} are geometry functions which are given in Tables AI.16 and AI.17 for the deepest point of the crack (A), and at the intersection of the crack with the free surface (B), respectively. See Figure AI.11.

Table AI.16. Geometry functions at point A for a part circumferential external surface crack in a cylinder.

***2c/a*= 2, *R_i/t* = 5**					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	0.659	0.471	0.387	0.337	0.659
0.2	0.661	0.455	0.367	0.313	0.645
0.4	0.673	0.462	0.374	0.321	0.642
0.6	0.686	0.467	0.378	0.325	0.638
0.8	0.690	0.477	0.387	0.333	0.626
$2c/a$= 2, R_i/t = 10					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	0.659	0.471	0.387	0.337	0.659
0.2	0.662	0.456	0.368	0.313	0.653
0.4	0.676	0.464	0.376	0.322	0.659
0.6	0.690	0.470	0.381	0.328	0.664
0.8	0.695	0.482	0.392	0.337	0.660
$2c/a$= 4, R_i/t = 5					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	0.886	0.565	0.430	0.352	0.886
0.2	0.905	0.560	0.425	0.347	0.885
0.4	0.972	0.586	0.443	0.363	0.932
0.6	1.060	0.618	0.462	0.378	0.995
0.8	1.133	0.659	0.493	0.403	1.041
$2c/a$= 4, R_i/t = 10					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	0.886	0.565	0.430	0.352	0.886
0.2	0.903	0.559	0.425	0.347	0.891
0.4	0.969	0.586	0.443	0.363	0.947
0.6	1.051	0.616	0.462	0.378	1.016
0.8	1.108	0.654	0.491	0.403	1.059
$2c/a$= 8, R_i/t = 5					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	1.025	0.600	0.441	0.356	1.025
0.2	1.078	0.638	0.476	0.386	1.055
0.4	1.253	0.702	0.513	0.413	1.202
0.6	1.502	0.790	0.561	0.446	1.413
0.8	1.773	0.900	0.625	0.490	1.631

Table AI.16. Geometry functions at point A for a part circumferential external surface crack in a cylinder. (Continued)

***2c/a*= 8, R_i/t = 10**					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	1.025	0.600	0.441	0.356	1.025
0.2	1.073	0.637	0.475	0.386	1.060
0.4	1.246	0.700	0.512	0.413	1.219
0.6	1.489	0.786	0.559	0.445	1.443
0.8	1.711	0.880	0.616	0.484	1.640
***2c/a*= 16, R_i/t = 5**					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	1.079	0.635	0.473	0.388	1.079
0.2	1.186	0.685	0.504	0.406	1.162
0.4	1.482	0.797	0.570	0.454	1.419
0.6	1.907	0.951	0.654	0.508	1.779
0.8	2.461	1.166	0.776	0.591	2.220
***2c/a*= 16, R_i/t = 10**					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	1.079	0.635	0.473	0.388	1.079
0.2	1.182	0.684	0.504	0.405	1.168
0.4	1.491	0.800	0.571	0.454	1.458
0.6	1.949	0.962	0.658	0.511	1.883
0.8	2.479	1.165	0.772	0.587	2.363
***2c/a*= 32, R_i/t = 5**					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	1.101	0.658	0.499	0.413	1.101
0.2	1.252	0.716	0.525	0.422	1.225
0.4	1.599	0.854	0.607	0.482	1.525
0.6	2.067	1.036	0.713	0.555	1.926
0.8	2.740	1.313	0.875	0.666	2.491
***2c/a*= 32, R_i/t = 10**					
a/t	f_0^A	f_1^A	f_2^A	f_3^A	f_{bg}^A
0	1.101	0.658	0.499	0.413	1.101
0.2	1.252	0.716	0.525	0.421	1.237
0.4	1.651	0.869	0.614	0.485	1.611
0.6	2.243	1.089	0.736	0.566	2.157
0.8	3.011	1.387	0.904	0.678	2.845

Table AI.17. Geometry functions at point *B* for a part circumferential external surface crack in a cylinder.

$2c/a$= 2, R_i/t = 5					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.715	0.117	0.040	0.020	0.717
0.2	0.748	0.125	0.045	0.023	0.744
0.4	0.781	0.133	0.050	0.026	0.771
0.6	0.837	0.147	0.057	0.030	0.821
0.8	0.905	0.163	0.063	0.033	0.880
$2c/a$= 2, R_i/t = 10					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.713	0.117	0.041	0.020	0.713
0.2	0.748	0.125	0.046	0.023	0.745
0.4	0.783	0.133	0.051	0.026	0.777
0.6	0.841	0.149	0.058	0.030	0.832
0.8	0.912	0.166	0.064	0.033	0.898
$2c/a$= 4, R_i/t = 5					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.654	0.088	0.028	0.013	0.657
0.2	0.724	0.110	0.040	0.020	0.719
0.4	0.794	0.132	0.052	0.027	0.781
0.6	0.915	0.168	0.069	0.037	0.888
0.8	1.059	0.208	0.087	0.046	1.012
$2c/a$= 4, R_i/t = 10					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.649	0.087	0.028	0.013	0.649
0.2	0.723	0.110	0.040	0.020	0.720
0.4	0.797	0.133	0.052	0.027	0.791
0.6	0.925	0.172	0.071	0.038	0.912
0.8	1.081	0.215	0.089	0.048	1.058
$2c/a$= 8, R_i/t = 5					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.527	0.047	0.010	0.003	0.537
0.2	0.610	0.074	0.024	0.011	0.603
0.4	0.693	0.101	0.038	0.019	0.669
0.6	0.818	0.139	0.055	0.029	0.762
0.8	0.972	0.185	0.077	0.041	0.868

Table AI.17. Geometry functions at point *B* for a part circumferential external surface crack in a cylinder. (Continued)

$2c/a$= 8, R_i/t = 10					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.518	0.043	0.009	0.002	0.521
0.2	0.610	0.074	0.024	0.011	0.607
0.4	0.702	0.105	0.039	0.020	0.693
0.6	0.856	0.152	0.062	0.033	0.834
0.8	1.060	0.211	0.088	0.047	1.019
$2c/a$= 16, R_i/t = 5					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.425	0.029	0.004	0.001	0.454
0.2	0.459	0.040	0.010	0.004	0.443
0.4	0.493	0.050	0.016	0.007	0.432
0.6	0.529	0.058	0.018	0.008	0.390
0.8	0.542	0.057	0.016	0.006	0.294
$2c/a$= 16, R_i/t = 10					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.409	0.023	0.003	0.000	0.417
0.2	0.461	0.040	0.011	0.004	0.455
0.4	0.513	0.057	0.019	0.009	0.493
0.6	0.589	0.078	0.028	0.014	0.542
0.8	0.671	0.099	0.037	0.018	0.582
$2c/a$= 32, R_i/t = 5					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.307	0.017	0.005	0.000	0.379
0.2	0.306	0.016	0.003	0.000	0.265
0.4	0.305	0.014	0.001	0.000	0.151
0.6	0.299	0.008	0.000	0.000	0.024
0.8	0.292	0.003	0.000	0.000	0.255
$2c/a$= 32, R_i/t = 10					
a/t	f_0^B	f_1^B	f_2^B	f_3^B	f_{bg}^B
0	0.299	0.021	0.002	0.000	0.323
0.2	0.309	0.020	0.003	0.000	0.296
0.4	0.319	0.019	0.004	0.000	0.269
0.6	0.322	0.016	0.002	0.000	0.208
0.8	0.305	0.005	0.000	0.000	0.103

Remarks: The cylinder should be long in the transverse direction to the crack so that edge effects do not influence the results.
Taken from Reference AI.3 and AI.9.

Description: ***Complete circumferential external surface crack***

Schematic:

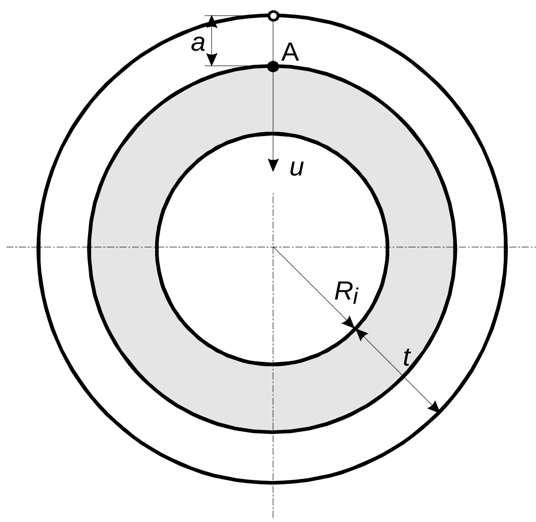


Figure AI.12. Complete circumferential external surface crack in a cylinder.

Solution:

The stress intensity factor K_I is given by

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{2pa}} \int_0^a s(u) \sum_{i=1}^{i=3} f_i(a/t, R_i/t) \left(1 - \frac{u}{a}\right)^{i-\frac{3}{2}} du \qquad \text{(AI.19)}$$

The stress state $s = s(u)$ is to be taken normal to the prospective crack plane in an uncracked cylinder. The co-ordinate u is defined in Fig. AI.12.

f_i (i = 1 to 3) are geometry functions which are given in Table AI.18 for the deepest point of the crack (A). See Figure AI.12.

Table AI.18. Geometry functions for a complete circumferential external surface crack in a cylinder.

	R_i/t = 7/3		
a/t	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	2.000	1.359	0.220
0.1	2.000	1.642	0.236
0.2	2.000	2.127	0.307
0.3	2.000	2.727	0.447
0.4	2.000	3.431	0.668
0.5	2.000	4.271	0.951
0.6	2.000	5.406	1.183
	R_i/t = 5		
a/t	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	2.000	1.362	0.221
0.1	2.000	1.659	0.221
0.2	2.000	2.220	0.303
0.3	2.000	2.904	0.535
0.4	2.000	3.701	0.857
0.5	2.000	4.603	1.311
0.6	2.000	5.671	1.851
	R_i/t = 10		
a/t	f_1^A	f_2^A	f_3^A
0	2.000	1.364	0.220
0.1	2.000	1.694	0.211
0.2	2.000	2.375	0.310
0.3	2.000	3.236	0.630
0.4	2.000	4.252	1.136
0.5	2.000	5.334	1.972
0.6	2.000	6.606	2.902

Remarks: The cylinder should be long in the transverse direction to the crack so that edge effects do not influence the results.
Taken from Reference AI.4.

AI.2.4. CRACKS IN A SPHERE

Description: ***Through-thickness crack***

Schematic:

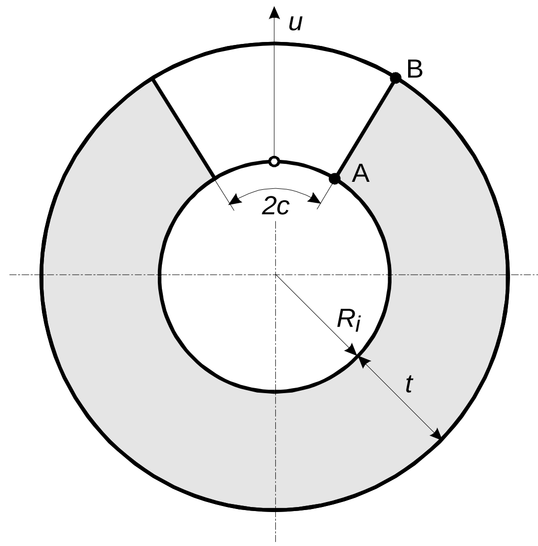


Figure AI.13. Circumferential through-thickness crack in a sphere.

Solution:
The stress intensity factor K_{I} is given by

$$K_I = \sqrt{pc}\left(s_m f_m\left(\frac{2c}{t},\frac{R_i}{t}\right) + s_b f_b\left(\frac{2c}{t},\frac{R_i}{t}\right)\right) \qquad \text{(AI.20)}$$

s_m and s_b are the membrane and through-thickness bending stress components, respectively, which define the axisymmetric stress state s according to

$$s = s(u) = s_m + s_b\left(1 - \frac{2u}{t}\right) \quad \text{for } 0 \le u \le t \qquad \text{(AI.21)}$$

s is to be taken normal to the prospective crack plane in an uncracked sphere. s_m and s_b are determined by fitting s to Equation (AI.21). The co-ordinate u is defined in Figure AI.13.

f_m and f_b are geometry functions which are given in Table AI.19 for the intersections of the crack with the free surface at u = 0 (*A*) and at u = t (*B*). See Figure AI.13.

Table AI.19. Geometry functions for a through-thickness crack in a sphere.

	$R_i/t = 10$				$R_i/t = 20$			
l/t	f_m^A	f_b^A	f_m^B	f_b^B	f_m^A	f_b^A	f_m^B	f_b^B
0	1.000	1.000	1.000	-1.000	1.000	1.000	1.000	-1.000
2	0.919	0.993	1.240	-1.031	0.941	0.995	1.144	-1.020
4	0.894	0.993	1.637	-1.074	0.897	0.992	1.401	-1.050
6	0.944	0.997	2.083	-1.111	0.895	0.993	1.700	-1.080
8	1.059	1.003	2.549	-1.143	0.932	0.996	2.020	-1.106
10	1.231	1.011	3.016	-1.170	1.003	1.001	2.351	-1.130
15	1.915	1.031	4.124	-1.226	1.309	1.014	3.186	-1.180
20	2.968	1.050	5.084	-1.272	1.799	1.028	3.981	-1.219

Remarks: Taken from Reference AI.8.

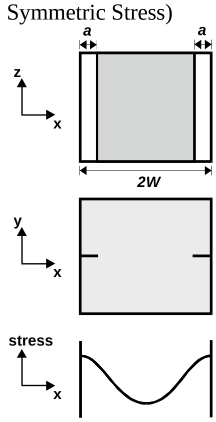
AI.3. ADDITIONAL SOLUTIONS FROM R6 CODE

Further solutions for stress intensity factors were extracted directly from the R6.CODE software and are presented in this section. Those solutions are presented graphically and algebraically. It should be noted that although R6.CODE allows for varying thicknesses to be considered, the solutions presented in this appendix are only for uniform thickness.

Stress Intensity Factor Handbook

Description: Extended Double Edge Cracked Finite Width Plate (For Symmetric Stress)

Schematic:



σ_0 = The Uncracked Body Stress at Mouth of Crack (x=0)

Equation:

$$K = \sqrt{\frac{\pi a}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)}}\left(\sigma_0 + \frac{F}{W}\right) \times Z$$

Where

$$Z = 1.122\left(1 - 0.5\left(\frac{a}{W}\right)\right) - 0.015\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0.091\left(\frac{a}{W}\right)^3$$

and

$$F = \int_0^a \left(\frac{W - x}{\frac{\pi}{2}}\right) \mathrm{acos}\left(\frac{x}{a} \cdot \frac{(W - a)}{(W - x)}\right)\left(\frac{d\sigma}{dx}\right) dx$$

Range of Applicability The defect depth should be less than half the specimen width 2W

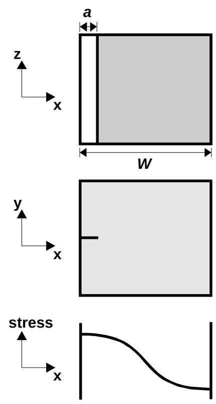
References Function is given in Reference AI.10. For uniform stressing the solution is the same as that given in Reference AI.11

Validation Reference AI.14 Pg. 111

Stress Intensity Factor Handbook

Description: Extended Surface Defect in Finite Width Plate

Schematic:



σ_0 = The Uncracked Body Stress at Mouth of Crack (x=0)

Equation:

$$K = YZA\sqrt{a}\left(\sigma_0 + \frac{F}{W}\right)$$

Where

$$F = \int_0^a \frac{(W-x)^2}{\frac{\pi W}{2}} \operatorname{acos}\left(\frac{x}{a}\frac{(W-a)}{(W-x)}\right)\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)dx$$

and

$$YZA = \frac{\sqrt{\pi}\left(1 + 2\left(\frac{a}{W}\right)\right)}{\left(1 - \left(\frac{a}{W}\right)\right)^{3/2}} U$$

Where

$$U = 1.12078 - 3.68220\left(\frac{a}{W}\right) + 11.9543\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 25.8521\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 33.09762\left(\frac{a}{W}\right)^4 - 22.4422\left(\frac{a}{W}\right)^5 + 6.17836\left(\frac{a}{W}\right)^6$$

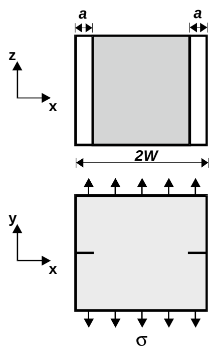
Range of Applicability The defect depth should be less than the specimen width W

References	Function is approximate and given in Reference AI.10 . The function is based on a bar of constant thickness so there are errors in using this in calculations with thickness variations.
Validation	Reference AI.14 pg. 84

Stress Intensity Factor Handbook

Description: Double Edge Notched Tension Specimen (Extended Crack)

Schematic:



s = The Uncracked Body Uniform Stress

Equation:

$$K = \sigma\, ZY \sqrt{a}$$

Where

$$ZY = \sqrt{\frac{p}{1-\left(\frac{a}{W}\right)}}\left(1.122\left(1-0.5\left(\frac{a}{W}\right)\right)-0.015\left(\frac{a}{W}\right)^2+0.091\left(\frac{a}{W}\right)^3\right)$$

Range of Applicability The defect depth should be less than half the specimen width 2W

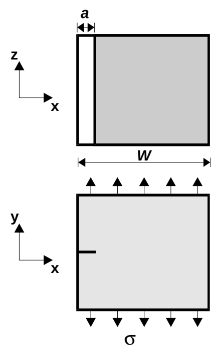
References

Validation Reference AI.12 eqn. 1 pg. 6
Reference AI.12 eqn. 2 pg. 6

Stress Intensity Factor Handbook

Description: Single edge Notched Tension Specimen (Extended Crack)

Schematic:



s = The Uncracked Body Uniform Stress

Equation: $K = \sigma\, ZY\sqrt{a}$

Where

$$ZY = \frac{\sqrt{p}\left(1+2\left(\frac{a}{W}\right)\right)}{\left(1-\left(\frac{a}{W}\right)\right)^{3/2}} \times V$$

Where

$$V = 1.12078 - 3.68220\left(\frac{a}{W}\right) + 11.95434\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 25.85210\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 33.09762\left(\frac{a}{W}\right)^4 - 22.4422\left(\frac{a}{W}\right)^5 + 6.17836\left(\frac{a}{W}\right)^6$$

Range of Applicability The defect depth should be less than the specimen width W

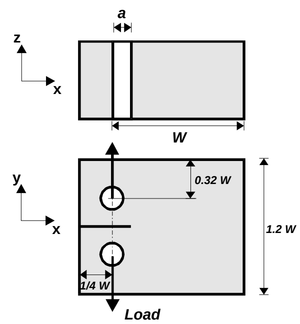
References

Validation Reference AI.13, Section 2.11

Stress Intensity Factor Handbook

Description: Compact Tension Specimen (Extended Crack)

Schematic:



s = The Uncracked Body Constant Stress (= Load / (Thickness x W))

Equation: $K = \sigma\, ZY\sqrt{a}$

Where

If $\left(\frac{a}{W}\right) \langle\ 0.701$ Then $ZY = Y3\left(\frac{a}{W}\right)$

If $\left(\frac{a}{W}\right) \rangle\ 0.701$ Then $ZY = Y4\left(\frac{a}{W}\right) \times Y\left(\frac{a}{W}\right)$

Where

$$Y3\left(\frac{a}{W}\right) = 29.6 - 185.5\left(\frac{a}{W}\right) + 655.7\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 1017\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 638.9\left(\frac{a}{W}\right)^4$$

$$Y4\left(\frac{a}{W}\right) = 4 - 6\left(\frac{a}{W}\right)\left(0.6366 - 0.365\left(\frac{a}{W}\right) + 00581\left(\frac{a}{W}\right)^2\right)$$

and

$$Y\left(\frac{a}{W}\right)=\frac{\sqrt{p}\left(1+2\left(\frac{a}{W}\right)\right)}{\left(1-\left(\frac{a}{W}\right)\right)^{3/2}}\times V$$

Where

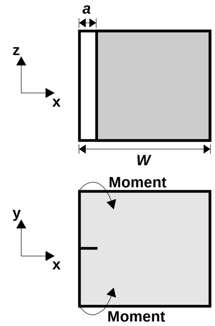
$$V=1.12078-3.68220\left(\frac{a}{W}\right)+11.95434\left(\frac{a}{W}\right)^{2}-25.85210\left(\frac{a}{W}\right)^{3}+33.09762\left(\frac{a}{W}\right)^{4}-22.4422\left(\frac{a}{W}\right)^{5}+6.17836\left(\frac{a}{W}\right)^{6}$$

Range of Applicability	The defect depth should be greater than 0.3 and less than 0.7 times the specimen width W
References	Reference AI.13
Validation	Reference AI.13, Section 2.20

Stress Intensity Factor Handbook

Description: Pure Bend Specimen (Extended Crack)

Schematic:



s = The Uncracked Body Extreme Fibre Tensile Stress

Equation:

$$K = \sigma\, ZY \sqrt{a}$$

Where

$$ZY = Y2\left(\frac{a}{W}\right) \times Y\left(\frac{a}{W}\right)$$

Where

$$Y\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{\sqrt{p}\left(1 + 2\left(\frac{a}{W}\right)\right)}{\left(1 - \left(\frac{a}{W}\right)\right)^{3/2}} \times V$$

Where

$$V = 1.12078 - 3.68220\left(\frac{a}{W}\right) + 11.95434\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 25.85210\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 33.09762\left(\frac{a}{W}\right)^4 - 22.4422\left(\frac{a}{W}\right)^5 + 6.17836\left(\frac{a}{W}\right)^6$$

and

$$Y2 = 1 - 2\left(\frac{a}{W}\right)\left(0.6366 - 0.365\left(\frac{a}{W}\right) + 0.0581\left(\frac{a}{W}\right)^2\right)$$

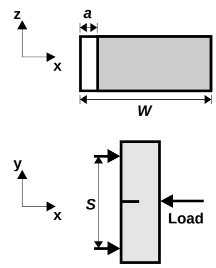
Range of Applicability References The defect size should be less than the specimen width W

Validation Reference AI.13 Section 2.14

Stress Intensity Factor Handbook

Description: Three Point Bend (s/W = 8) Specimen (Extended Crack)

Schematic:



s = The Uncracked Body Extreme Fibre Tensile Stress

Equation:

$$K = \sigma ZY\sqrt{a}$$

Where

$$\text{If } \left(\frac{a}{W}\right) \langle \ 0.651 \quad \text{Then} \quad ZY = Y5\left(\frac{a}{W}\right)$$

$$\text{If } \left(\frac{a}{W}\right) \rangle \ 0.651 \quad \text{Then} \quad ZY = ZZ \times Y2\left(\frac{a}{W}\right) \times Y\left(\frac{a}{W}\right)$$

Where

$$Y\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{\sqrt{p}\left(1 + 2\left(\frac{a}{W}\right)\right)}{\left(1 - \left(\frac{a}{W}\right)\right)^{3/2}} \times V$$

Where

$$V = 1.12078 - 3.68220\left(\frac{a}{W}\right) + 11.95434\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 25.85210\left(\frac{a}{W}\right)^3$$
$$+ 33.09762\left(\frac{a}{W}\right)^4 - 22.4422\left(\frac{a}{W}\right)^5 + 6.17836\left(\frac{a}{W}\right)^6$$

and

$$Y2 = 1 - 2\left(\frac{a}{W}\right)\left(0.6366 - 0.365\left(\frac{a}{W}\right) + 0.0581\left(\frac{a}{W}\right)^2\right)$$

$$Y5 = 1.96 - 2.75\left(\frac{a}{W}\right) + 13.66\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 23.98\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 25.22\left(\frac{a}{W}\right)^4$$

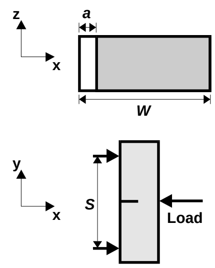
ZZ = 0.9738993

Range of Applicability	The defect depth should be less than 0.65 times the specimen width W
References	
Validation	Reference AI.13, Section 2.16

Stress Intensity Factor Handbook

Description: Three Point Bend (s/W = 4) Specimen (Extended Crack)

Schematic:



s = The Uncracked Body Extreme Fibre Tensile Stress

Equation:

$$K = \sigma\, ZY\sqrt{a}$$

Where

$$\text{If } \left(\frac{a}{W}\right) \langle\ 0.651 \quad \text{Then} \quad ZY = Y6\left(\frac{a}{W}\right)$$

$$\text{If } \left(\frac{a}{W}\right) \rangle\ 0.651 \quad \text{Then} \quad ZY = ZZ \times Y2\left(\frac{a}{W}\right) \times Y\left(\frac{a}{W}\right)$$

Where

$$Y\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{\sqrt{p}\left(1 + 2\left(\frac{a}{W}\right)\right)}{\left(1 - \left(\frac{a}{W}\right)\right)^{3/2}} \times V$$

Where

$$V = 1.12078 - 3.68220\left(\frac{a}{W}\right) + 11.95434\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 25.85210\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 33.09762\left(\frac{a}{W}\right)^4 - 22.4422\left(\frac{a}{W}\right)^5 + 6.17836\left(\frac{a}{W}\right)^6$$

and

$$Y2 = 1 - 2\left(\frac{a}{W}\right)\left(0.6366 - 0.365\left(\frac{a}{W}\right) + 0.0581\left(\frac{a}{W}\right)^2\right)$$

$$Y6 = 1.93 - 3.07\left(\frac{a}{W}\right) + 14.53\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 25.11\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 25.8\left(\frac{a}{W}\right)^4$$

$$ZZ = \frac{Y6(0.65)}{Y2(0.65) \times Y(0.65)}$$

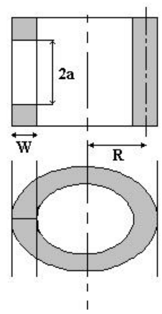
Where Y6(0.65), Y2(0.65) and Y(0.65) are the values of Y6, Y2 and Y for $\frac{a}{W} = 0.65$

Range of Applicability References	The defect depth should be less than 0.65 times the specimen width W
Validation	Reference AI.13, Section 2.16

Stress Intensity Factor Handbook

Description: Axial Through Thickness Defect in a Cylinder

Schematic:



R = The Mean Radius

$\sigma_h, \sigma_b^s =$ The Average Uniform Hoop Stress, and the Extreme Fibre Bending Stress of the Uncracked Body, Respectively.

Equation:

For hoop stresses:

$$K_{in} = \sigma_h.\sqrt{\pi a}\,(G1(\rho) - g1(\rho))$$

$$K_{out} = \sigma_h.\sqrt{\pi a}\,(G1(\rho) + g1(\rho))$$

For through wall self - equilibrated bending stresses:

$$K_{in} = \sigma_b^s.\sqrt{\pi a}\,(H1(\rho) - h1(\rho))$$

$$K_{out} = \sigma_b^s.\sqrt{\pi a}\,(H1(\rho) + h1(\rho))$$

Where

$$r = \frac{a}{\sqrt{R \cdot W}}$$

$$G1(\rho) = \sqrt{1 + 0.7044\rho + 0.8378\rho^2}$$

$$g1(\rho) = -0.035211 + 0.39394\rho - 0.20036\rho^2 + 0.028085\rho^3 - 0.0018763\rho^4 + \frac{(3.912 - \ln(R/W))}{1.6094}.\begin{pmatrix} 0.01556 - 0.05202\rho + \\ .0381\rho^2 - .012782\rho^3 \\ + 0.001246\rho^4 \end{pmatrix}$$

$$H1(\rho) = 0.76871 - 0.27718\rho + 0.14343\rho^2 - 0.037505\rho^3 + 0.0035194\rho^4$$
$$+ \frac{(3.912 - \ln(R/W))}{1.6094} . \begin{pmatrix} 0.09852 - 0.16404\rho + \\ 0.10378\rho^2 - 0.027703\rho^3 \\ + 0.002597\rho^4 \end{pmatrix}$$

$$h1(\rho) = -0.0030702 + 0.074457\rho - 0.018716\rho^2 + 0.0025344\rho^3$$
$$- 0.00014028\rho^4 + \frac{(3.912 - \ln(R/W))}{1.6094} . \begin{pmatrix} .0005847 + .010301\rho \\ - 0.007184\rho^2 \\ + 0.0019107\rho^3 \\ - 0.00017655\rho^4 \end{pmatrix}$$

Range of Applicability $0 \le \rho \le 4.4$

References based on Reference AI.15

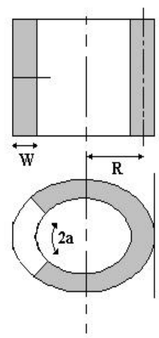
Remarks A more complete and accurate solution covering a wider range of geometry and load configuration may be obtained following the results of the finite element study contained in Reference AI.2. These results are not included in this compendium due to the large amount of normalised stress intensity factors presented in the form of figures and tables in the reference.

Validation Reference AI.16

Stress Intensity Factor Handbook

Description: Circumferential Through Thickness Defect in a Cylinder

Schematic:



$\sigma_a, \sigma_b^s =$ The Average Uniform Hoop Stress, and the Extreme Fibre Bending Stress of the Uncracked Body, Respectively.

Equation:

For hoop stresses:

$K_{in} = \sigma_a . \sqrt{\pi a} (G2(\rho) - g2(\rho))$

$K_{out} = \sigma_a . \sqrt{\pi a} (G2(\rho) + g2(\rho))$

For through wall self - equilibrated bending stresses:

$K_{in} = s_b^s . \sqrt{\pi a} (H2(\rho) - h2(\rho))$

$K_{out} = \sigma_b^s . \sqrt{\pi a} (H2(\rho) + h2(\rho))$

For bending stresses on cracked section:

$K_a = \sigma_b \sqrt{\pi a} . G * 2(\rho, \beta)$

Where:

$G * 2(\rho, \beta) = G2(\rho) . \mathrm{Sin}(\beta) . C2(\beta) / (\beta . C1(\beta))$

Where:

$\beta = a/R$ (Half angle subtended by defect)

Where

$\rho = \frac{a}{\sqrt{RW}}$

AI.57

$$G2(\rho) = 1 + 0.19\rho + 0.01\rho^2$$

$$g2(\rho) = -0.010195 + 0.2965\rho + 0.20036\rho^2 + 0.030839\rho^3 - 0.0012261\rho^4$$

$$H2(\rho) = 0.81978 - 0.57979\rho + 0.28201\rho^2 - 0.068923\rho^3 + 0.0063193\rho^4 + \frac{(4.60517 - \ln(R/W))}{2.30259} \cdot \begin{pmatrix} 0.1183 - 0.21012\rho + \\ 0.13265\rho^2 - 0.034987\rho^3 \\ + 0.0032506\rho^4 \end{pmatrix}$$

$$h2(\rho) = -0.0016231 + 0.058527\rho - 0.027002\rho^2 + 0.0044161\rho^3 - 0.00021917\rho^4$$

$$C1(\beta) = 1 + \frac{0.7071(1 - \beta.\mathrm{Cot}(\beta))}{\left(\frac{\mathrm{Cot}(\pi - \beta)}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}.\mathrm{Cot}(\beta)\right).\beta}$$

$$C2(\beta) = 1 + \frac{0.35355\left(\beta + \beta.\mathrm{Cot}^2(\beta) - \mathrm{Cot}(\beta)\right)}{\left(\frac{\mathrm{Cot}(\pi - \beta)}{\sqrt{2}} + \mathrm{Cot}(\beta)\right)}$$

Range of Applicability $0 \le \rho \le 4.4$

References based on Reference AI.15

Remarks A more complete and accurate solution covering a wider range of geometry and load configuration may be obtained following the results of the finite element study contained in Reference AI.2. These results are not included in this compendium due to the large amount of normalised stress intensity factors presented in the form of figures and tables in the reference.

Validation Reference AI.16

C Rapport Softwarevergelijking

Software Vergelijking Destructability

Alexander Grooff

18 maart 2014

Samenvatting

In dit rapport wordt er gesproken over de mogelijke aanpakmethodes om destructability te simuleren. Hierin wordt een overzicht gemaakt van de mogelijkheden, waar de voor en -nadelen op worden gesomd per methode. Er worden enkele criteria vereist van de aanpak, zoals de haalbaarheid binnen de deadline en visuele aantrekkelijkheid. Uiteindelijk wordt er geconcludeerd dat de beste keuze bij Havok Destruction ligt voor de afstudeerstage gezien de benodigde tijd van de andere manieren van aanpak. Voor TNO zal de keuze liggen tussen RayFire en Havok Destruction, omdat de visuele effecten plus de bruikbaarheid duidelijk beter zijn bij RayFire, terwijl Havok Destruction een werkende destructability engine heeft.

Inhoudsopgave

1 Inleiding

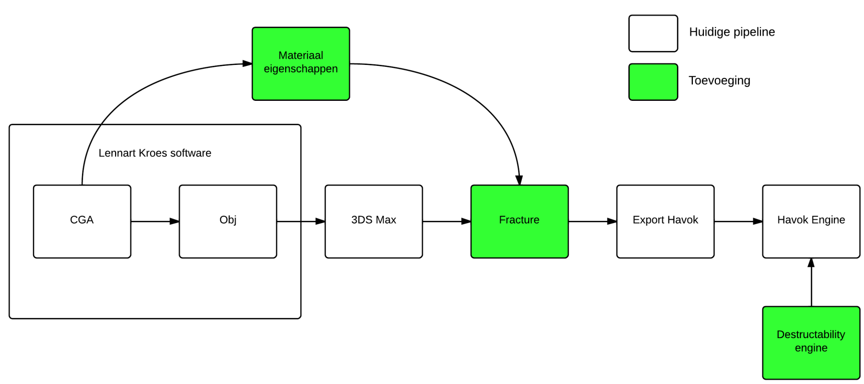
Om de keuze tussen de aanpak voor destructability overzichtelijker te maken is er gekozen om een korte samenvatting van de keuzes te maken. In dit document zal er gesproken worden over de verschillende aanpakmethodes, waarbij een korte introductie en de voor en -nadelen worden gegeven.

1.1 Doelstelling

Lennart Kroes heeft een applicatie geschreven waarbij een virtueel perceel automatisch kan worden gegenereerd. Dit kan vervolgens geëxporteerd worden naar 3DS Max, waar aanpassingen gemaakt kunnen worden. Hierna wordt het geëxporteerd naar de Havok engine, die vervolgens de simulatie zal creëeren. Tussen deze stappen moet er een aanpak ontwikkelt worden waarbij het model in 3DS Max een *destructability* model meegegeven krijgt. Dit zal gebeuren op basis van meegegeven materiaal eigenschappen die gegenereerd worden in de *Computer Generated Architecture* (CGA). Het doel van dit onderzoek is om te bepalen welke aanpak het meest geschikt is om dit te realiseren. Er wordt gewerkt op basis van de pipeline in figuur 1. Er worden van tevoren een aantal criteria vastgelegt dat de aanpak nodig heeft. Idealistisch gezien is de aanpak

- Natuurkundig correct
- Visueel aantrekkelijk
- Haalbaar voor de deadline (6 juni)
- Makkelijk mee te werken
- Implementeerbaar in de huidige pipeline

Helaas zal niet elk van deze criteria gehaald kunnen worden, dus er moet gekozen worden voor de aanpak die de meeste van deze punten haalt.



Figuur 1: Schematische weergave van de pipeline

2 Software Pakketten

In dit hoofdstuk zal elk software pakket afzonderlijk worden besproken met een korte inleiding en vervolgens de voor en -nadelen.

2.1 Havok Destruction

Havok Destruction is een module die bij de Havok engine toegevoegd kan worden. Deze module is gebaseerd op de werkingen van de Havok engine en zorgt dus dat de integratie van deze twee zeer goed zijn. Dit betekent dat het exporteren van 3DS Max modellen die aangepast zijn met Havok Destruction gemakkelijk ingeladen en gebruikt kunnen worden in de Havok engine.
Havok Destruction heeft een aantal manieren om destructability te simuleren. Objecten kunnen gebroken worden met een pie-fracture, slice-fracture, split-in-half-fracture, wood-fracture, Voronoi-fracture, debris-fracture, decompose-fracture en cut-out-fracture. Hiernaast kan ook een noise-functie aan de breuk worden toegevoegd waardoor de breuk er realistischer uit kan zien. Vervolgens kan per object gezegd worden wanneer het moet breken en in hoeveel stukken het moet breken. Dit kan mooie en visueel-realistische destructability opleveren. Tegelijkertijd wordt er bij de Havok engine een *destructability engine* toegevoegd die ervoor zorgt dat het gebroken model op een realistische manier in stukken breekt (zodra er genoeg kracht op het object wordt geleverd).
Helaas is er qua natuurkundige elementen weinig overgebleven. Voor het aanpassen van de destructability zijn voornamelijk variabelen die de randomness aanpassen, maar niet natuurkundige variabelen (bijvoorbeeld yield stress, ultimate tensile stress ed.).
Hiernaast is de werkbaarheid van Havok niet al te gemakkelijk. Er zijn een hoop knoppen waar gedraaid aan kan worden en de documentatie is enorm. Hierdoor kan men snel de draad kwijt zijn. Overigens kan de zeer uitgebreide variatie wel voordelig werken in de handen van een expert.

Voordelen aan Havok Destruction:

- Integratie met Havok engine is gemakkelijk
- Heeft een eigen destructability engine
- Documentatie is ruim beschikbaar
- Visueel goede resultaten

Nadelen aan Havok Destruction:

- Natuurkundige kant ontbreekt; is gebaseerd op randomness
- Beperkte aanpasbaarheid in de destructability-variabelen
- Is niet het meest overzichtelijke programma
- Kostprijs is hoog

2.2 RayFire

RayFire is een 3DS Max plugin dat gebruikt wordt door grote titels zoals The Avengers, Diablo 3 en nog vele anderen. Het is zeer gemakkelijk te gebruiken, geeft visueel-mooie resultaten en is relatief goedkoop qua kostprijs.
RayFire maakt een overzichtelijke weergave van de mogelijke destructability opties. Er worden bij 3DS Max een aantal modifiers toegevoegd, waar de *RayFire Fragmenter* het grootste werk doet. Het visuele effect ziet er realistischer uit dan dat Havok Destruction voor elkaar krijgt (persoonlijke mening).
Daarnaast is de preview-tool uitstekend. Voordat de modellen ge-exporteerd zullen worden naar de Havok engine kan er uitvoerig gesimuleerd worden op het gemaakte model.
De in RayFire-gemaakte modellen kunnen wel geëxporteerd worden naar de Havok engine, maar hier is helaas geen destructability engine voor die met de modellen kan werken. Dit betkent dus dat er een destructability engine geschreven moet worden die zal moeten werken met de RayFire-gemaakte modellen.

Voordelen aan RayFire:

- Visueel zéér mooie resultaten
- Werkt gemakkelijk
- Goedkoop in vergelijking tot Havok Destruction ($365 voor een commerciële licentie, $130 voor een studenten licentie)
- Documentatie is ruim beschikbaar

Nadelen aan RayFire:

- Natuurkundige kant ontbreekt; is gebaseerd op randomness
- Geen werkende destructability engine in de Havok engine

2.3 Eigen Software

De eigen software is uit het oogpunt van een natuurkundige opgezet. Het doel is om destructability zo realistisch mogelijk te simuleren. Hier zit een hoop theorie en werk achter, wat helaas nog niet is afgerond. Voordat het werkt moet er nog een hoop gebeuren, wat gezien de deadline (6 juni) krap wordt. Ook ontbreekt, net zoals bij RayFire, een destructability engine, dus die zal zelf gemaakt moeten worden.
Wel is het qua licentiekosten natuurlijk geheel gratis. Dit wordt ontwikkelt door TNO en is dus ook de source-code beschikbaar. Dit levert veel flexibiliteit op, omdat dit bij de andere twee mogelijkheden niet het geval is.

Voordelen aan eigen software:

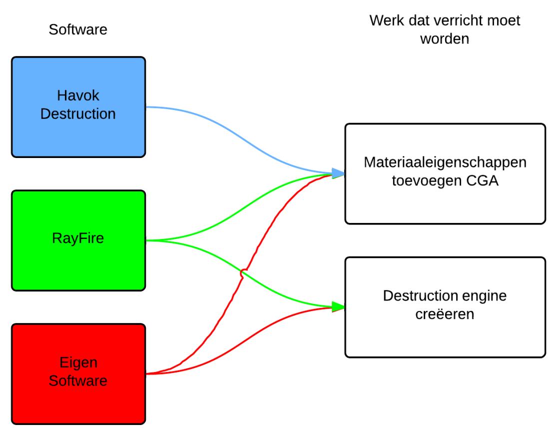
- Natuurkundig volledig correct
- Aanpasbaar, source-code is beschikbaar
- Volledige kennis over het gehele programma
- Geen licentie-kosten

Nadelen aan eigen software:

- Nog niet af; er moet nog een hoop gebeuren voordat het correct funtioneert
- Niet de mooiste resultaten
- Er zal een destructability engine geschreven moeten worden

3 Conclusie

Uiteindelijk blijft het een moeilijke keuze. De keuze zal voornamelijk afhangen tussen natuurkundige-correctheid en het besparen van tijd/geld. Daarnaast weegt ook mee dat er bij de zelfgemaakte software ook een tijdslimiet aan hangt (6 juni is de uiterlijke deadline). Hierdoor valt eigenlijk de zelfgemaakte software af.
De keuze tussen Havok Destruction en RayFire is een lastige. RayFire biedt een eenvoudigere manier van werken en visueel-betere resultaten, terwijl Havok Destruction al een destruction engine heeft. Gezien de deadline van 6 juni voor de afstudeerstage van *Destructability in een virtuele omgeving* is Havok Destruction een betere optie. Voor TNO is RayFire misschien een betere keuze, als er tijd wordt gestoken in het maken van een eigen destructability engine.



Figuur 2: Schematische weergave van de software