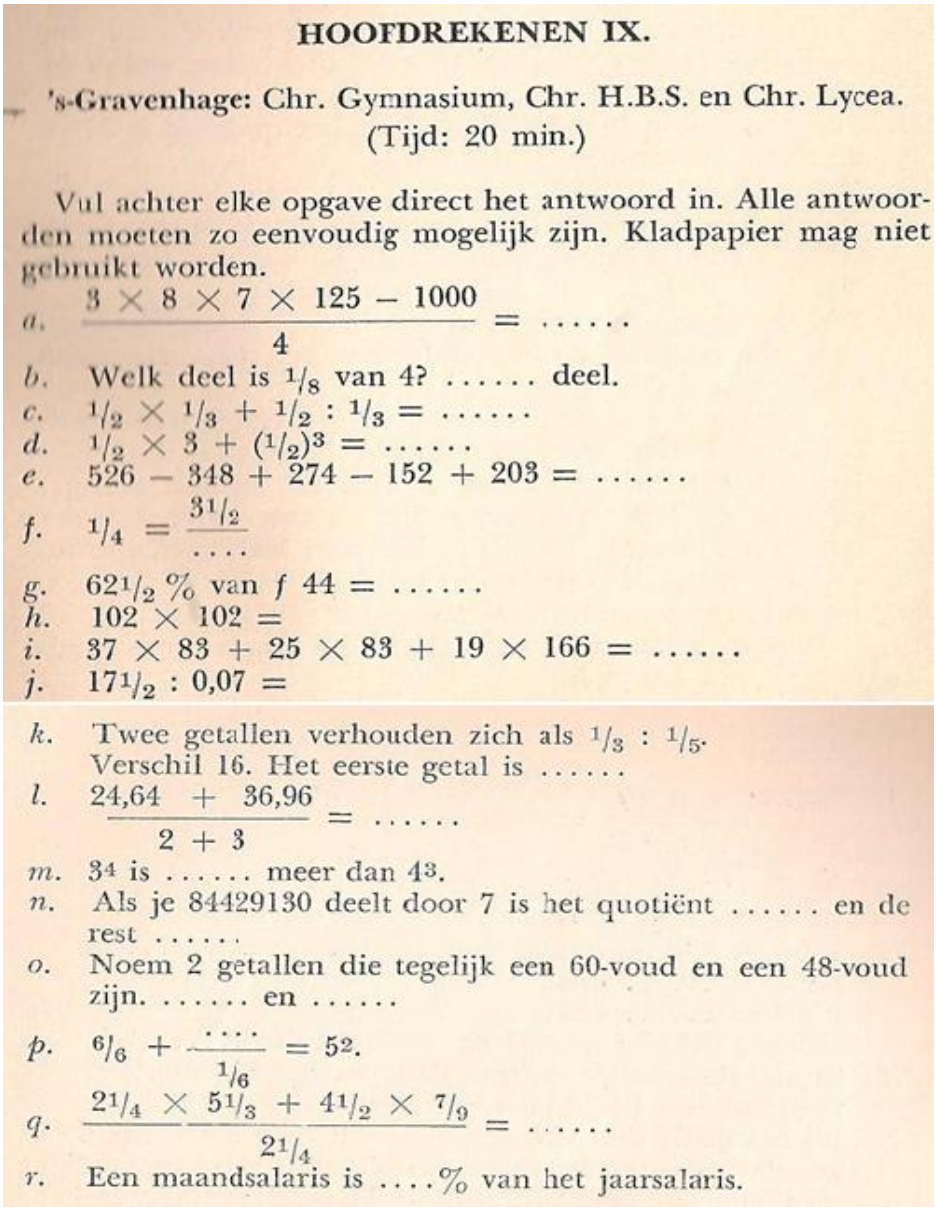


HOOFDREKENEN IX.

's-Gravenhage: Chr. Gymnasium, Chr. H.B.S. en Chr. Lycea.
(Tijd: 20 min.)

Vul achter elke opgave direct het antwoord in. Alle antwoorden moeten zo eenvoudig mogelijk zijn. Kladpapier mag niet gebruikt worden.

a. $\frac{3 \times 8 \times 7 \times 125 - 1000}{4} = \ldots\ldots$

b. Welk deel is $^1/_8$ van 4? ..... deel.

c. $^1/_2 \times {}^1/_3 + {}^1/_2 : {}^1/_3 = \ldots\ldots$

d. $^1/_2 \times 3 + (^1/_2)^3 = \ldots\ldots$

e. $526 - 348 + 274 - 152 + 203 = \ldots\ldots$

f. $^1/_4 = \frac{3^1/_2}{\ldots\ldots}$

g. $62^1/_2$ % van f 44 = ...

h. $102 \times 102 =$

i. $37 \times 83 + 25 \times 83 + 19 \times 166 = \ldots\ldots$

j. $17^1/_2 : 0{,}07 =$

k. Twee getallen verhouden zich als $^1/_3 : {}^1/_5$.
Verschil 16. Het eerste getal is .....

l. $\frac{24{,}64 + 36{,}96}{2 + 3} = \ldots\ldots$

m. 3^4 is ..... meer dan 4^3.

n. Als je 84429130 deelt door 7 is het quotiënt ..... en de rest .....

o. Noem 2 getallen die tegelijk een 60-voud en een 48-voud zijn. ..... en .....

p. $^6/_6 + \frac{\ldots\ldots}{^1/_6} = 5^2$.

q. $\frac{2^1/_4 \times 5^1/_3 + 4^1/_2 \times {}^7/_9}{2^1/_4} = \ldots\ldots$

r. Een maandsalaris is ....% van het jaarsalaris.

Kunnen leerlingen van nu dit uitrekenen?

Analyse van de onderwijsbehoefte van “rekenzwakke” gymnasium leerlingen

Praktijkonderzoek in het kader van de opleiding Master Special Educational Needs

Auteur: Monique Bakkers

Studentnummer: 2138569

Fontys OSO

Leerroute: RVTO

Begeleiding: Aartje Bouman

augustus 2012

Bron voorpagina: Toetsnaald 1960

Een verzameling van admissie-examens van middelbare scholen en gymnasia, waaronder de opgave der centrale commissie en verschillende oefeningen waarin rekening is gehouden met de eisen van toelating, bedoeld in het Kon. Besluit van 19 maart 1938, Staatsblad 265 : P Noordhoff NV. Groningen. p. 115.

INHOUDSOPGAVE

SAMENVATTING 5

INLEIDING 7

HOOFDSTUK 1 AANLEIDING EN PROBLEEMSTELLING 9

HOOFDSTUK 2 THEORETISCH KADER. 12

2.1 TRADITIONEEL VERSUS REALISTISCH REKENEN 13
2.1.1 Het mechanistisch rekenonderwijs *13*
2.1.2 Het functioneel rekenonderwijs *15*
2.1.3 Het realistisch rekenonderwijs *16*
2.2 DE RESULTATEN VAN HET REALISTISCH REKENONDERWIJS. 18
2.3. WAT KUNNEN WE CONCREET VERWACHTEN VOOR DE EERSTEJAARS GYMNASIAST? 20

HOOFDSTUK 3 ONDERZOEKSMETHODOLOGIE 22

3.1 ONDERZOEKSVRAGEN 22
3.2 DE REKENTOETS EN HET VERVOLG. 24
3.2.1. Overwegingen bij het samenstellen van de toets *24*
3.3 INTERVENTIEPROGRAMMA VERMENIGVULDIGEN EN DELEN. 26
3.3.1 Invulling van het interventieprogramma. *27*
3.4 BETROUWBAARHEID EN VALIDITEIT 28
3.4.1 Herhaalbaarheid *28*
3.4.2 Nauwkeurigheid *28*
3.4.3 Validiteit *28*
3.4.4 Condities afname toets *29*
3.4.5 Ethiek *30*

HOOFDSTUK 4 DATA ANALYSE EN RESULTATEN 31

4.1. DATA ANALYSE TOETS 1, 2 31
4.1.1 Hoofdrekenen toets 1 vermenigvuldigen *31*
4.1.2 Hoofdrekenen toets 2 delen *32*
4.2 DATA ANALYSE TOETS I-IV 33
4.2.1 Toetsonderdeel I Volgorde bewerkingen *33*
4.2.2 Toetsonderdeel II Vermenigvuldigen *34*
4.2.3 Toetsonderdeel III Delen *36*
4.2.4 Toetsonderdeel IV Bewerkingen met breuken. *38*
4.2.4.1 Bewerking: Optellen en aftrekken met breuken 40
4.2.4.2 Bewerking: Vermenigvuldigen breuken 41
4.2.4.3 Bewerking: Delen met breuken 42
4.2.4.4 Toets I-IV Totaal beeld. *43*
4.3 RESULTATEN INTERVENTIEPROGRAMMA 43
4.3.1 Interventie vermenigvuldigen *43*
4.3.2 Interventie delen *44*

HOOFDSTUK 5 CONCLUSIES EN DISCUSSIE 45

5.1 AANBEVELINGEN VOOR HET BELEID OP SCHOOL 53

HOOFDSTUK 6 EVALUATIE 55

6.1 HOE HEEFT MIJN ONDERZOEK BIJGEDRAGEN AAN VERBETERING VAN HET REKENONDERWIJS? 55

6.2 HOE HEEFT DIT ONDERZOEK MIJ IN MIJN GEDRAG EN ONTWIKKELING ALS REKENSPECIALIST VERANDERD? 55
6.3 HOE IS HET ONDERZOEK VERLOPEN? 57

NAWOORD 58

LITERATUURLIJST 59

BIJLAGE 1 GESPREKKEN MET DRIE DOCENTEN UIT DE SECTIE WISKUNDE. 62

BIJLAGE 2 RELEVANTE ONDERDELEN VAN TULE VOOR DE TOETS. 65

BIJLAGE 3 GEVOLGDE PROCEDURE VOOR DE ONTWIKKELING VAN DE REKENTOETS EN HET INTERVENTIEPROGRAMMA. 70

BIJLAGE 4 REKENTOETS 71

BIJLAGE 5 VERANTWOORDING AFZONDERLIJKE OPGAVEN VAN DE REKENTOETS 78

BIJLAGE 6 BRIEF INTERVENTIEPROGRAMMA VOOR DE OUDERS 87

BIJLAGE 7 INTERVENTIEPROGRAMMA VERMENIGVULDIGEN EN DELEN 88

BIJLAGE 8 OPZET VAN DE LESSEN INTERVENTIEPROGRAMMA 100

BIJLAGE 9 AANTAL NIET GEMAAKTE OPDRACHTEN BIJ TOETS III DELEN. 101

BIJLAGE 10 AANTAL NIET GEMAAKTE OPDRACHTEN BIJ TOETSONDERDEEL IV BREUKEN. 102

BIJLAGE 11 TOETS 1 + 2 GECOMBINEERD. HET TOTAAL AANTAL FOUTEN OVER BEIDE TOETSEN 103

BIJLAGE 12 RESULTATEN INTERVENTIE VERMENIGVULDIGEN 103

BIJLAGE 13 RESULTATEN INTERVENTIE DELEN 104

Samenvatting

Het rekenonderwijs op de basisschool heeft een grote verandering ondergaan. Dit heeft gevolgen voor het niveau van verticaal mathematiseren van leerlingen van nu ten opzichte van 30 jaar geleden.
Docenten wiskunde gaan ervan uit dat eerstejaarsleerlingen op het gymnasium tot de beste groep leerlingen van de basisschool behoren en dat de extra uitdaging in het basisonderwijs, die deze leerlingen aan kunnen, benut is voor het verbeteren van de verticale rekenvaardigheden. Echter worden geconfronteerd met leerlingen waarbij de procedurele kennis en vaardigheden van de basisvaardigheden onvoldoende is. De onderwijsmethode die op dit moment gebruikt wordt voor rekenen bevalt derhalve niet. Om die reden moet er een nieuw rekenprogramma ontwikkeld worden. Daarnaast geven ze aan dat vroegtijdige signalering van `rekenzwakke´ leerlingen van belang is omdat slechte basisrekenvaardigheden een belemmering zijn in de ontwikkeling van het wiskundig inzicht. In het kader van deze wensen en de noodzaak van een rekenbeleid, vanwege het rekenvaardigheidsexamen in de toekomst, heb ik mijn onderzoek gedaan.
De eerste hoofdvraag in mijn onderzoek is:
Zijn alle eerstejaarsleerlingen binnen het gymnasiale onderwijs van onze school voldoende[1] vaardig in het, zonder rekenmachine, oplossen van rekenkundige basisschoolbewerkingen met natuurlijke, decimale breuken en breuken?
De onderzochte basisrekenvaardigheden zijn vermenigvuldigen, delen, volgorde van bewerkingen en bewerkingen met breuken.
Voor dit onderzoek heb ik een toets ontwikkeld die zowel hoofdrekenen als ook het cijferend rekenen test. Een leerling behoort tot de groep ‘zwakke’ rekenaars als hij tot de 20% slecht scorende leerlingen van de totaal geteste groep behoort. Het gewenste niveau is bereikt als een leerling de goede uitkomst bij 60-70% van de opgaven van een type bewerking genereert en daarbij een adequate oplossingsstrategie kiest die voldoende snel is om alle opgaven te kunnen maken in de beschikbare tijd. De test is uitgevoerd bij 104 eerstejaars gymnasiumleerlingen.

[1] Als *voldoende* wordt beschouwd dat leerlingen gebruik maken van *adequate oplossingsstrategieën* passend bij de verschillende rekenkundige bewerkingen. Een adequate oplossingstrategie is een oplossing die leidt tot het *goede* antwoord en die in *voldoende tempo* wordt toegepast, zodat deze niet belemmerend werkt bij het afmaken van de toets in de beschikbare tijd.

Uit de resultaten blijkt dat voor de hoofdrekentaken, te weten volgorde van bewerkingen en vermenigvuldigen, een groot deel van de groep voldoet aan de normen van de docenten. Echter, voor delen en bewerkingen met breuken scoort de groep slecht tot zeer slecht volgens de norm van de docenten.
Op basis van verdere analyse van de toetsresultaten heb ik een interventieprogramma ontwikkeld om de `rekenzwakke´ leerlingen, die ik heb geïdentificeerd met bovenstaande rekentoets, efficiënt de algoritmes voor vermenigvuldigen en delen aan te leren en de metacognitieve vaardigheden te verbeteren. Dit leidt tot mijn tweede hoofdvraag:
Resulteert een interventie met de traditionele rekenmethode tot verbetering van de rekenvaardigheden?
Ondanks de kleine opkomst , is toch duidelijk geworden dat de traditionele rekenmethode voor gymnasiale leerlingen zorgt voor verbetering van de procedurele kennis en vaardigheden van de algoritmes voor vermenigvuldigen en delen.
Naar aanleiding van bovenstaande heb ik de volgende aanbevelingen gedaan:

- De wiskundeles voor de eerstejaars gymnasiasten komt de eerste maand geheel in het teken te staan van rekenen, waarbij het gebruik van standaardalgoritmes centraal staat.
- In het begin van het jaar wordt de door mij ontwikkelde rekentoets afgenomen om rekenzwakke leerlingen te signaleren, opdat docenten extra aandacht aan hen kunnen besteden.
- Een vergelijkbare toets wordt na deze maand afgenomen. De rekenzwakke leerlingen zullen dan door mij via specifiek op hun leemtes gebaseerd programma geremedieerd worden.
- Er wordt een nieuw rekenprogramma ontwikkeld, waarbij de interventie materialen de basis vormen.

Inleiding

Op dit moment ben ik werkzaam als docente biologie en remedial teacher op een gymnasium. Het wordt mijn taak om samen met de wiskunde sectie een rekenbeleid te ontwikkelen ter voorbereiding van het rekenvaardigheidsexamen en daarnaast een geïntegreerd beleid binnen de bèta secties te ontwikkelen voor het didactisch handelen bij het oplossen van rekenkundige bewerkingen in wiskundige vergelijkingen. Dit praktijkonderzoek is een eerste aanzet om te komen tot een goed rekenvaardighedenbeleid binnen de eigen beroepspraktijk.
In dit praktijkonderzoek is het verticale rekenvaardighedenniveau[2] onderzocht. Het praktijkonderzoek richt zich op het bepalen van de beginsituatie van eerstejaars gymnasium leerlingen en de vroegtijdige signalering van leerlingen, die de basisvaardigheden onvoldoende beheersen. Daarnaast richt het zich op het effect van interventie op het rekenvaardighedenniveau van ´zwakke´ rekenaars middels de traditionele rekenmethodes, het zogenaamde cijferend rekenen. Op korte termijn moet dit leiden tot een effectieve snelle onderwijsmethode voor eerste klas gymnasium leerlingen om de basisvaardigheden op het gewenste niveau te brengen. De onderzochte basisrekenvaardigheden zijn: vermenigvuldigen, delen, volgorde van bewerkingen en bewerkingen met breuken. In principe zijn dit vaardigheden die de leerlingen op de basisschool geleerd hebben. Het niveau van toetsing ligt op 1S niveau van deze bewerkingen. Goede rekenvaardigheid betekent in dit onderzoek dat een leerling de basisvaardigheid goed beheerst, in tempo kan werken en een goede uitkomst van de opgaven genereert. Voor het begrip rekenvaardigheid ga ik uit van de ruime definitie van Ruijssenaars et al. (2004). Zij definiëren rekenen als “een proces waarin een realiteit (of een abstractie daarvan) wordt geordend of herordend met behulp van op inzicht berustende denkhandelingen, welke ordening in principe is te kwantificeren en die toelaat om er logische operaties op uit te voeren dan wel uit af te leiden” (Ruijssenaars, Van Luit & Van Lieshout, 2004. p. 24). Om goed te kunnen

[2] •Horizontaal mathematiseren. Dit is het proces waarbij een reëel probleem getransformeerd wordt naar een wis-, rekenkundige bewerking.
•Verticaal mathematiseren. Dit is het vervolgproces, dat betrekking heeft op de mathematische verwerking, de probleemoplossing, generalisatie van de oplossing, niveauverhoging, verkorting en de verdergaande formalisering, en het ontdekken van structuren en patronen (Treffers, 1978). Voor mijn onderzoek versta ik onder een goed verticaal rekenvaardigheidsniveau: Gebruik van efficiënte oplossingsstrategieën die leiden tot de juiste uitkomst binnen de gestelde tijd.

rekenen moet een leerling op het VWO op getaldimensie, bewerkingsdimensie en toepassingsbewerking kunnen rekenen.
Het onderzoek is uitgevoerd op een gymnasium met eerste klas leerlingen, die gedurende het schooljaar 2011-2012 hun rekenvaardigheden onderhouden met de lesmethode Moderne Wiskunde 1 Havo/Vwo oefenboek rekenen.

Hoofdstuk 1 Aanleiding en probleemstelling

Rekenen is voor mij altijd een hobby geweest en wellicht merk ik daarom regelmatig op dat leerlingen niet in staat zijn zonder rekenmachine relatief eenvoudige rekenopgaven snel uit te rekenen en uitkomsten van de rekenmachine te controleren. Hierbij is niet de context het probleem, maar het correct en snel uitrekenen van ´kale ´sommen. Ook mijn collega´s van de sectie wiskunde constateren dat de basisvaardigheden van het rekenonderwijs onvoldoende aanwezig zijn.

Anekdotes

Aan tweede klas leerlingen wordt in een van mijn toetsen biologie gevraagd 27,2 % te berekenen van 15,20 kg. Het gaat hier om een enkele som. Bijna alle leerlingen pakken hun rekenmachine of vragen deze aan een buurman. Een opmerking van mij dat ze deze enkele opgave uit de toets ook zonder rekenmachine kunnen uitrekenen, confronteert mij met verschrikte gezichtsuitdrukkingen. Bij navraag blijken veel leerlingen niet eens te weten hoe ze de som op papier zouden moeten uitrekenen. Met de rekenmachine is het voor de meesten geen probleem. Echter, bij het controleren van het antwoord blijkt dat dan soms wel een probleem te zijn. Antwoorden die een tienvoud te laag liggen komen regelmatig voor.

Stelling van een van de oudere wiskunde docenten: het rekenniveau van de leerlingen is in de laatste 20-30 jaar enorm gedaald. Hierbij verwijst hij naar de toetsnaald uit 1960, (zie voorpagina), en vraagt leerlingen in klas 3 of 4 een van de opgave uit het boekje op te lossen. Een opgave die indertijd tot het toelatingsexamen behoorde van bepaalde gymnasia. Veel leerlingen weten niet hoe ze de opgaven moeten aanpakken.

Status quo

Op het categoriale gymnasium komen leerlingen terecht van wie de basisschool de indruk heeft dat ze alle basisvaardigheden voldoende beheersen om op dit niveau het onderwijs aan te kunnen. De meeste leerlingen hebben dan ook in het leerlingvolgsysteem A scores. Bij het aannamebeleid van onze school neemt de totale Citoscore een belangrijke plaats in. De drempel ligt, bijna conform de adviezen van het Cito, bij een score van 543. Dit criterium is echter geen garantie dat alle basisvaardigheden voldoend ontwikkeld zijn, terwijl de docenten daar wel van uit gaan. In het kader van mijn onderzoek heb ik een aantal gesprekken gevoerd met verschillende docenten uit de sectie wiskunde (zie bijlage 1). Uit deze gesprekken is naar voren gekomen dat:

- docenten wiskunde het wiskundeonderwijs in het eerste jaar zien als een herhaling van de basisvaardigheden rekenen toegepast binnen de eenvoudige wiskunde. Zij vinden dat leerlingen op dit niveau al op de basisschool goede en snelle oplossingsstrategieën zouden moeten hebben

ontwikkeld voor de verschillende bewerkingen binnen de kerndoelen van de basisschool (Buijs, Klep & Nooteboom, 2008) en deze strategieën min of meer geautomatiseerd zouden moeten hebben. Zij worden echter steeds geconfronteerd met leerlingen die o.a. voor het oplossen van algebra vraagstukken, vraagstukken met breuken en bewerkingen met meervoudige vermenigvuldigingen vreemde, foute of tijdrovende oplossingsstrategieën gebruiken. Zelfs sommige bovenbouw leerlingen blijken nog moeite te hebben met deze basisschool rekenvaardigheden.

- zij in de rekenles geconfronteerd worden met een grote variatie van beheersing van de basisvaardigheden onder de leerlingen.
- het les tempo hoog ligt. Het lesprogramma geeft weinig ruimte om de basisschool rekenvaardigheden van leerlingen te verbeteren.
- veel leerlingen, ook in de bovenbouw, voor rekenopgaven volledig afhankelijk zijn van hun rekenmachine en niet meer in staat zijn met de hand complexere vermenigvuldigingen of delingen met bijvoorbeeld decimale breuken foutloos op te lossen.
- de beperkte rekenvaardigheid invloed heeft op het schatten. Een leerling zou snel m.b.v. schatten kunnen zien dat het antwoord fout is. Maar dat gebeurt onvoldoende. Uitkomsten worden niet of onvoldoende met snelle rekencontroles op het laatste cijfer of op grootheid gecontroleerd. De metacognitieve vaardigheden zijn dus onvoldoende.
- leerlingen moeizaam van inefficiënte oplossingsstrategieën af te brengen zijn.

Om ondanks de beperkte tijd toch de basisschool rekenvaardigheden te verbeteren en te onderhouden, is door de wiskundesectie in 2010 besloten tot het introduceren van de lesmethode Moderne Wiskunde 1 Havo/Vwo oefenboek rekenen in de eerste klas. Een methode die op de realistische rekenmethode geschoeid is. Leerlingen werken het boek in principe zelfstandig door. De ervaringen met deze methode zijn niet zo positief. Docenten moeten nog steeds erg veel klassikaal uitleggen, de opgaven zijn getalsspecifiek en dus te eenvoudig en bewerkingen worden nog steeds niet voldoende geautomatiseerd.

Over de noodzaak van vroege signalering geven de docenten wiskunde aan dat gebrekkige rekenvaardigheden leiden tot problemen met het oplossen van wiskundige vergelijkingen, formules en algebra.(Dekker & Kindt, 2006). Daarnaast

maken de leerlingen ondanks het gebruik van de rekenmachine, meer fouten in hun berekeningen, en is er een gebrek aan tempo in de lessen en bij toetsen (met name bij ogenschijnlijk eenvoudige berekeningen). Het gevolg is dat er veel lage cijfers bij wiskunde vallen. Een tijdige signalering is dus gewenst voor leerlingen met een zwak wiskundig inzicht en slechte rekenvaardigheden.

Hoofdstuk 2 Theoretisch kader.

De kinderen kunnen niet rekenen! Is een veel gehoorde uitspraak van docenten. Tijdens mijn studie is het mij opgevallen dat er een discrepantie is, tussen aan de ene kant de ervaringen van de docenten wiskunde en natuurkunde en van mijzelf als docent biologie, en aan de andere kant de resultaten van internationale onderzoeken als TIMSS[3] en PISA[4], waarin de Nederlandse scholieren nog altijd zeer hoog scoren op het gebied van rekenen en wiskunde. (Schoot, 2008). Wat kennen en kunnen de leerlingen nu wel en niet als ze aan de poort staan van het voortgezet onderwijs?
Wat is er veranderd in het wiskunde onderwijs?
Een van de belangrijkste veranderingen is voortgekomen uit de technologie. De ontwikkeling van de rekenmachine en de computer heeft ertoe geleid dat de maatschappelijke behoefte aan mensen die vlot en efficiënt complexe rekenopgaven kunnen maken is geslonken. Grote complexe vermenigvuldigingen en delingen kunnen in een handomdraai op een rekenmachine gedaan worden. Hierdoor zien veel basisscholen minder de noodzaak voor het verwerven van bepaalde rekenvaardigheden (Buijs, 2008.p.68).Tel daarbij op het feit dat leerlingen vanaf dag één op de middelbare school een rekenmachine mogen gebruiken en er ontwikkelt zich een hele groep mensen met minder vaardigheid in het efficiënt oplossen van complexe rekenopgaven en daarmee verwante rekenkundige inzichten, algoritmen en metacognitieve vaardigheden.
Echter, dit is niet de enige verandering in de laatste 50 jaar. Ook de visie op de didactiek van het wiskunde onderwijs heeft een revolutie ondergaan. De discussie op dit moment binnen de wiskunde richt zich op de veranderde visie over de toekomst van het rekenonderwijs en spitst zich toe op twee aandachtgebieden van het leerproces en twee verschillende stromingen binnen de kennisleer (behaviorisme en het constructivisme). De twee aandachtsgebieden zijn:

- Horizontaal mathematiseren. Dit is het proces waarbij een reëel probleem getransformeerd wordt naar een wis-, rekenkundige bewerking.
- Verticaal mathematiseren .Dit is het vervolgproces, dat betrekking heeft op de mathematische verwerking, de probleemoplossing, generalisatie van de oplossing en verdergaande formalisering (Treffers, 1978)

[3] Trends in International Mathematics and Science Study
[4] Programme for International Student Assessment

In de didactiek heeft een verschuiving plaatsgevonden van het behaviorisme naar het (socio-) constructivisme. (Verhoef, 2006) Dit heeft geleid tot drie hoofdstromen binnen het onderwijs te weten; het mechanistische[5], het functionele en realistische rekenonderwijs.

Het behaviorisme is gebaseerd op experimenten met dieren waarbij met voordoen en nadoen, belonen (zoals het stempeltje of plakplaatje!) en straffen kennis wordt geconditioneerd. Kenmerkend is verder het overdrachtsonderwijs waarbij het accent ligt op de inhoud en niet op de leerling die de leerstof krijgt aangeboden. De didactiek is sterk directief. De twee hoofdstromen, het mechanistische en functionele rekenonderwijs zijn geënt op het behaviorisme.

De nadruk in het (socio)constructivisme ligt op het zelfontdekkend leren waarbij de leerling de lesstof zelf integreert. Deze kennis groeit uit tot gemeenschappelijke kennis van alle leerlingen via een proces van betekenis-onderhandelen. De docent heeft vooral de rol als begeleider en gangmaker en vraagt leerlingen hun kennis en ideeën te delen zonder direct te vragen naar hun antwoorden of strategieën. De veronderstelling is dat de ontdekking zelf de beloning van het denken is.(Verhoef, 2006) (Buijs, 2008. p 43) Het sinds de jaren 90 gangbare realistische rekenonderwijs is geënt op dit socio-constructivisme.

2.1 Traditioneel versus realistisch rekenen

2.1.1 Het mechanistisch rekenonderwijs

In de jaren 1950-1960 wijzigt de wijze van toelating tot de middelbaar onderwijs. Dit heeft ertoe geleid dat de toen gangbare leerboeken zich steeds meer richtten op het aanleren van algoritmes en zich steeds minder of niet op het toepassingsgericht en inzichtelijk rekenen. Wat over bleef, waren boekjes vol lange uniforme opgaven zonder of met zeer schaarse context opgaven.

[5] De hoofdstromen mechanistisch en functioneel rekenonderwijs worden in de literatuur vaak gemakshalve samen genoemd als het traditioneel rekenonderwijs. Echter uit bovenstaande kunt u concluderen dat de didactiek en lesmethode verschillend is. Terecht worden deze twee type onderwijs uit elkaar getrokken. Het mechanistisch rekenonderwijs wordt dan het traditioneel cijferonderwijs genoemd en het functioneel rekenonderwijs traditioneel rekenonderwijs. De hoofdstroom realistisch rekenen wordt samen met het functioneel rekenen gerekend tot het conceptueel rekenen, alwaar het mechanistische rekenen tot het procedurele rekenen gerekend wordt (Treffers & Heuvel- Panhuizen, 2010)

Het mechanistische rekenonderwijs, zoals de stroming in het rekenonderwijs uit die tijd nu genoemd wordt, kenmerkt zich door een directieve didactiek en door éénsporig [6]cijferen. Het horizontaal mathematiseren wordt niet of nauwelijks onder aandacht van de gemiddelde leerling gebracht. De didactische aanpak is formeel en van meet af aan gericht op het opereren volgens nauw omschreven regels. Kennis wordt door middel van stampen en oefenen eigen gemaakt. Een mooie illustratie van deze vorm van onderwijs wordt beschreven door Van Den Heuvel (2009). De staartdeling werd als volgt in klas drie besproken.

De deling	De deling in vorm
12 : 4 = 3	4/ 12 \ 3
	<u>12</u>
	0

De uitleg van de leraar. *Je moet maar denken dat die twee schuine strepen staartjes zijn. 4 op de 12 gaat 3 keer. Je schrijft 3 op. Dan neem je die laatste 3 x 4 =12.*
De leerlingen krijgen uitleg over de methode zonder enig begrip. Direct worden de verkorte methoden van de basisvaardigheden, de traditionele algoritmen, aangeleerd. Een algoritme zoals de staartdeling wordt vanaf groep 5 goed geoefend met allerlei getalstructuren als decimale breuken en natuurlijke getallen. Het automatiseren van de algemeen toepasbare procedures staat voorop.
Het mechanistisch rekenonderwijs schenkt daarmee niet alleen weinig aandacht aan het horizontaal rekenen, ook voor het verticaal rekenen, waarbij het niet alleen gaat om de goed uitkomst, maar ook voor het inzicht in de bewerkingen, is nauwelijks aandacht. Dit laatste uit zich in de leerboekjes door het ontbreken van inzichtelijke uitleg van vermenigvuldigen en delen m.b.v. kolomsgewijs rekenen, schattend en handig hoofdrekenen en een inzichtelijke opbouw van de cijferalgoritmen.(Treffers & Heuvel - Panhuizen, 2010) De gedachtegang hierachter is geweest dat leerlingen bovenstaande vaardigheden en wiskundig inzicht vanzelf ontwikkelen als er maar vaak genoeg geoefend wordt.
Als goede rekenaar en basisschoolleerling van die tijd en na de bestudering van de leerboekjes van de mechanistische lesmethode *Naar Zelfstandig Rekenen* (Zandvoort, Venekamp & Kuipers, 1970) wil ik toch een paar kanttekeningen maken bij deze algemeen geaccepteerde visie op de mechanistische lesmethode. Ik

[6] Het eensporig cijferen betekent dat voor de vier hoofdbewerkingen met hele getallen en komma getallen per bewerking slechts één procedure wordt aangeleerd, die algemeen toepasbaar is.

herinner mij nog dat ik veel handige hoofdrekenstrategieën deels door de docent deels door mijzelf bedacht en onthouden zijn. Handige oplossingsstrategieën, zoals verdubbelen en halveren, 1 erbij of 1 eraf zijn, indien toegepast in de juiste situatie, ten opzichte van de traditionele algoritmes tijdbesparend. Als bioloog weet ik dat in de natuur aanpassingen alleen behouden blijven als ze een functie hebben. En dus heb ik ze onthouden. Tevens heb ik geconstateerd dat aan een slimme leerling, die de basisbewerkingen uit het takenboekje goed kan toepassen en tot de juiste antwoorden komt, de methode meer uitdaging biedt door extra stof uit het boekje *Meer.* Hierin wordt aandacht besteed aan horizontaal mathematiseren. Er staan veel lange contextvraagstukken in en vraagstukken met grafieken. Kortom, de rekensterke leerling, waar wij op het gymnasium normaliter mee te maken krijgen, heeft na 8 jaar mechanistisch rekenonderwijs alle traditionele algoritmen geautomatiseerd en waarschijnlijk net als ik veel van de handige rekenvaardigheden geleerd. Deze kennis heeft in de jaren 60-80 van de vorige eeuw de basis voor de wiskunde op het voortgezet onderwijs gevormd. En is de kennis waar de oude wiskundedocent uit de inleiding naar refereert.
Echter, voor de gemiddelde en ‘zwakke’ rekenaar is er weinig variatie. Ook ik constateer dat algoritmes zoals de staartdeling iedere keer op dezelfde manier uitgelegd worden. Het boekje *Weer*, waar rekenzwakke leerlingen extra stof uit oefenen, geeft zoals de titel al aangeeft ellenlange rijtjes met dezelfde type opgaven met dezelfde uitleg. Een weinig inspirerende bezigheid. Het mag dan ook niet vreemd zijn dat een deel van de leerlingen aan het eind van de basisschool met deze methode nog steeds niet de basisvaardigheden goed beheerst.

2.1.2 Het functioneel rekenonderwijs

In dezelfde periode (1950-1990) zijn als gevolg van de verschraling van het rekenonderwijs nieuwe stromingen opgekomen, het functioneel rekenonderwijs is hier een van. Op de andere, het realistisch rekenonderwijs, kom ik later terug. Verschillende lesmethodes als `Functioneel Rekenen´, `Boeiend Rekenen´, `Rekenen voor de Basisschool´ en `Nieuw rekenen´ zijn ontwikkeld op basis van een meersporig rekenonderwijs. Over deze methodes staat in de handleidingen:

- Geeft inzicht in de structuur van getallen, hoofdrekenen en is schatten een belangrijk onderdeel.

- Hoofdrekenen is altijd functioneel en is niet cijferen uit het hoofd. Het vraagt inzicht in de getalsstructuren. (Bruinsma, 1969) .
- Het zelf ontdekken, het aanbieden van oplossingsstructuren heeft als doel de doorbraak van inzicht te bevorderen. Het kiezen van de kortste, de eenvoudigste oplossingsmethoden spoort aan tot grote geestelijke activiteit. (Reynders & Snijders, 1959).

Ook deze methodes bieden veel 'kale' sommen aan, maar geven ook inzicht in verschillende oplossingstrategieën, zoals in het onderstaande voorbeeld wordt weergegeven (Treffers & Heuvel-Panhuizen, 2010)

5 x 98 = 5 x 90 + 5 x 8 =

Maar ook 5 x 100 -5 x 2 =

En ook de helft van 10 x 98 =

Het vermenigvuldigen wordt inzichtelijk onderwezen via splitsend, kolomsgewijs rekenen. Ook de staartdeling wordt in drie fasen naast elkaar geschematiseerd. Getalrelaties, belangrijk bij de keuze van de oplossingsstrategie en controle van uitkomsten (zogenaamde metacognitieve vaardigheden), komen aan bod. Het verbeteren van met name het verticale mathematiseren heeft positieve effecten gehad op het rekenonderwijs, zoals is terug te vinden in de peilingen van het Cito uit de periode 1987-1997, waarin de twee methodes *Nieuw Rekenen* en *Naar Zelfstandig Rekenen* vergeleken worden. *Nieuw Rekenen* scoort op de basisbewerkingen hoofdrekenen, het hoofdrekenend vermenigvuldigen en delen, en het schattend rekenen beter, terwijl de verschillen op het cijferend rekenen minimaal zijn (Treffers & Heuvel - Panhuizen, 2010). Ondanks deze resultaten hebben deze methodes onderwijsland niet kunnen veroveren.

2.1.3 Het realistisch rekenonderwijs

Om het rekenonderwijs ook voor rekenzwakke leerlingen interessant te maken en de prestaties te verbeteren, is in de jaren 80 - 90 een ommezwaai gekomen. De uitgangspunten voor cijferen (Cadot & Vroegindeweij, 1986) zijn in 1984 in het concept Nationaal Plan reken-wiskunde onderwijs op de basisschool als volgt omschreven.

- Cijferen minder centraal te stellen ten gunste van hoofdrekenen, schattend rekenen en getalsinzicht.
- Het cijferen voor alle leerlingen meer toepassingsgericht te maken.
- Leerlingen niet direct de meest verkorte standaardalgoritmen te leren, maar te beginnen met een notatie wijze met gehele getallen.

De kennisleer van het constructivisme en het socio- constructivisme vindt zijn intree in de didactiek.

De basis voor het nieuwe rekenonderwijs wordt gebaseerd op vijf grondprincipes, de realistische onderwijstheorie, waarin het horizontaal rekenen en het socio-constructivisme een belangrijke plaats krijgen.(Treffers, 1987) De grondprincipes zijn als volgt verwoord;

- Zelf kennis construeren: Contexten vormen de verbinding met de werkelijkheid. Het vormt voor de leerling de bron voor connectie en samenhang met het abstracte rekenen. De leerling bouwt zelf kennis en vaardigheden op en koppelt deze aan bestaande kennis
- Niveaus en modellen: Modellen vormen de brug tussen het informele rekenen naar meer abstract, formeel rekenen. Het model dient als geheugensteun en verdieping van het wiskundig begrip. Elke leerling leert op verschillende niveaus. Eerst leert de leerling concreet, dat wil zeggen informeel met behulp van tastbare materialen of herkenbare situaties. Daarna wordt er naar formeel, schematisch, toegewerkt. Zodra de leerling dit kan, wordt er overgegaan naar mentaal rekenen (zogenaamde hoofdrekenen)
- Reflectie eigen productie: De leerling leert nadenken over eigen handelen door het stellen van vragen, confronteren met alternatieven en discussie, waardoor de leerling eigen oplossingsstrategieën zal ontwikkelen en inzicht krijgt in zijn eigen ontwikkeling.
- Sociale context: De leerlingen leren van elkaar door de verschillende oplossingsstrategieën van elkaar te vergelijken en uit te wisselen. Het proces van verkorten en niveauverhoging wordt hierdoor gestimuleerd.
- Verstrengeling van leerlijnen: Leerlingen worden gestimuleerd dwarsverbanden en samenhang binnen de lesstof te ontdekken. Samenhang in kennis, inzichten en vaardigheden wordt daarmee gestimuleerd.

Het doel is dat de leerling door de contextopgaven informele oplossingsmethoden ontwikkelt, die de basis vormen voor formalisering van de rekenoperaties en een toepassingssituatie voor de geleerde rekenvaardigheid bieden om zo de motivatie te verhogen (Gravemeijer & Doorman, 1999).
Om de realistische methode te stimuleren worden er kerndoelen (Buijs et al.,2008) geformuleerd, waarin staat dat ook het handig rekenen, schattend rekenen en meetkunde in het lesprogramma moeten worden opgenomen. Het traditionele rekenonderwijs voldoet hier niet aan. Scholen worden vanaf dat moment genoodzaakt hun methoden aan te passen (KNAW, 2009. p23.) Om de kwaliteit van het rekenonderwijs te garanderen, worden er van overheidswege referentiekaders geformuleerd, waaraan een leerling aan het eind van de basisschool moet voldoen, het fundamenteel niveau 1F en voor de Vmbo-t/Havo/Vwo leerling een streef niveau 1S. Dit alles heeft ertoe geleid dat anno 2012 het rekenonderwijs op bijna alle basisscholen gestoeld is op de realistische methode (Inspectie van onderwijs, 2008). Inter- en nationale onderzoeken naar de resultaten van het rekenonderwijs kunnen vrijwel zeker direct gelinkt worden aan de realistische onderwijsmethode (Putten van, 2008).

2.2 De resultaten van het realistisch rekenonderwijs.

Uit Internationaal onderzoek, zoals het TIMSS, PISA, blijkt steeds weer dat Nederlandse leerlingen erg hoog scoren. Echter nadere analyse van de resultaten laat zien dat de Nederlandse leerlingen slechter gaan scoren in vergelijking met vorige onderzoeken.
Een opsomming van de analyses leert ons:

1. Uit analyse van het PISA onderzoek van 2003 in vergelijk met het onderzoek uit 2006 komt naar voren dat de betere leerling slechter scoort (daling van 7,3% naar 5,4% voor het hoogste PISA niveau) (Gelderop, 2008. p.14).
2. De analyse van twintig jaar PPON[7] laat voor mijn onderzoek een aantal zeer interessante conclusies zien ten aanzien van het niveau van leerlingen aan het eind van de basisschool (Schoot, 2008):

[7] Periodiek Peilingonderzoek van het Onderwijsniveau in Nederland

a. De onderdelen hoofdrekenen (optellen en aftrekken), schattend rekenen en procenten zijn verbeterd. Het niveau van het domein ‘meten en meetkunde’ is dramatisch laag ook voor toekomstige Havo/Vwo leerlingen (Harskamp, 2007)
b. Het onderdeel bewerkingen (vermenigvuldigen en delen van natuurlijke getallen en decimale breuken) is beduidend verslechterd. Daarbij wordt opgemerkt dat de nieuwe algoritmische oplossingsstrategieën[8] minder vaak tot een goed antwoord leiden dan traditionele strategieën (Janssen, Van der Schoot en Hemker, 2005. p.231-235) (KNAW, 2008)

3. De heer Van Putten heeft de resultaten van het PPON-2004 vergeleken met die van PPON 1997 en komt tot de conclusie dat bij deelsommen de leerlingen minder staartdelingen gebruiken dan voorheen. Opvallend veel leerlingen maken geen bewerking op papier, dit leidt tot veel foute antwoorden. (Putten, 2008) (Putten & Hickendorff, 2006).
4. Mevrouw Vos (Vos, 2008) vergelijkt de prestaties van leerlingen in de tweede klas van het VO en constateert dat de Nederlandse leerlingen nog steeds goed scoren t.o.v. van leerlingen van omringende landen. Echter, er is een licht dalende trend te zien. Uit het onderzoek komt naar voren dat:
    a. (ten opzichte van het buitenland) de `betere´ leerling t.o.v. de gemiddelde leerling laag scoort, dit is de groep leerlingen waar wij op het gymnasium mee te maken hebben;
    b. op het rekengebied een zwakte geconstateerd wordt bij opgaven over `bewerkingen op breuken´;
    c. binnen het algebragebied een zwakte geconstateerd wordt bij de opgaven waarbij leerlingen moeten ´mathematiseren´

De resultaten van de analyses hebben ertoe geleid dat er een ware strijd is ontstaan tussen voorstanders en, naar het in eerste instantie, lijkt voorstanders van de traditionele rekenmethodes. Echter, bij het bestuderen van de literatuur is mij opgevallen dat niemand zich negatief uit over het horizontaal, context gerelateerd, rekenen. De kritiek wordt geuit op het ontwikkelingsniveau van het verticaal rekenen aan het einde van de basisschool voor zeer zwakke en sterke rekenaars en de socio- constructieve didactiek. Twee aspecten waarin het realistisch rekenen sterk

[8] nieuwe algoritmische oplossingsstrategieën zijn: Kolomsgewijs rekenen voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen

verschilt van het mechanische rekenen. Deze kritiek en adviezen van de experts heb ik gebruikt voor het ontwikkelen van mijn toets en het opzetten van mijn interventieprogramma, zoals later ook zal blijken.

De voornaamste kritiek:

1. De heer Harskamp (2007) als ook de heer Craats (2007) geven vergelijkbare kritiek. De realistische rekenmethode bevat te weinig systematisch[9] opgebouwd oefenmateriaal en heeft teveel aandacht voor getalsspecifieke rekenstrategieën en te weinig aan algemeen geldende strategieën
2. Mevrouw Bruin- Muurling gaat nog een stap verder. Zij stelt dat geformaliseerde procedures onvoldoende expliciet behandeld worden in de klas. Daarnaast constateert zij dat getalspecifieke procedures als standaardprocedures aangeleerd worden en onvoldoende als basis vormen voor verdere generalisatie, formalisering en inzicht voor een algemeen geldende procedure, zoals het cijferend rekenen. Er is onvoldoende aandacht voor verbanden tussen de verschillende oplossingsstrategieën (Bruin-Muurling, Gravemeijer & Eijk ,2010).
3. Het realistisch rekenen heeft te weinig aandacht voor het automatiseren en oefenen van rekenvaardigheden. Automatiseren zorgt ervoor dat het werkgeheugen niet meer belast wordt. (Gelderblom, 2008. p 40). Voor onze leerlingen een belangrijk punt, omdat zo het tempo verhoogd wordt en geheugenruimte gebruikt kan worden voor de complexe wiskunde.

2.3. Wat kunnen we concreet verwachten voor de eerstejaars gymnasiast?

De eerstejaars leerlingen behoren tot de beste groep leerlingen van de basisschool. De docenten wiskunde gaan ervan uit dat de procedurele kennis voor bewerkingen vermenigvuldigen, delen met natuurlijke getallen, breuken en decimale getallen, bekend is en voldoende geautomatiseerd is. Echter, mogen ze dit verwachten?

---

[9] Met systematische opgebouwd wordt verwezen naar fase 2 en 4 van een succesvol leerproces. Deze 2 fases zijn niet voldoende in de methodes gestructureerd.(Craats, 2007) De 4 fases zijn:
1. Oriëntering (context, voorbeelden)
2. Oefenen, eerst makkelijk, dan iets moeilijker. Geen contexten!
3. Verdieping met contexten en voorbeelden
4. Meer oefeningen, zonder contexten

Uitgaande van het rapport van de commissie Meijerink (2008) beheersen de leerlingen minimaal het 1F niveau, echter vwo leerlingen zouden minimaal 1S niveau moeten halen. De kerndoelen, waarop het 1F niveau inhoudelijk gebaseerd is en die betrekking hebben op mijn onderzoek zijn in bijlage 2 weergegeven. Het rapport Meijerink geeft duidelijk aan dat het 1S niveau een verdieping is van de basisvaardigheden en zich kenmerkt door formaliseren en generaliseren van de onderdelen die op 1F niveau voorkomen. Het 1S niveau omvat de bewerkingen in het gehele gebied van natuurlijke getallen en met complexere decimale breuken en omvat de kennis van de algoritmes (algemeen geldende procedures). De bewerkingen met breuken zijn echter beperkt. Formeel opereren met breuken komt alleen bij optellen en aftrekken aan bod. In de rekenlijnen[10] staat de geformaliseerde procedure voor delen en vermenigvuldigen genoteerd voor het voortgezet onderwijs, en is de stof voor de basisschool beperkt tot de informele procedures. Echter de commissie Meijerink adviseert basisscholen wel Havo/Vwo leerlingen kennis te laten maken met alle formele procedures voor bewerkingen met breuken (2008. p 36).
Of het maximale 1S niveau en dus de verwachtingen van de wiskunde docenten gerechtvaardigd zijn, hangt niet alleen van de leerling af, maar ook van de visie en de vaardigheden van de basisschooldocent. Zo wordt op hoog 1S niveau op het einde van de basisschool niet getoetst. En in de literatuur wordt het nut van de bewerkingen met complexere getalsstructuren en breuken in het basisonderwijs en de vaardigheden van de basisschooldocenten regelmatig ter discussie gesteld. (KNAW, 2008) (Uittenbogaard, 2008)

[10] http://www.fi.uu.nl/rekenlijn/

Hoofdstuk 3 Onderzoeksmethodologie

Mijn praktijkonderzoek richt zich op het signaleren, concretiseren en voorkomen van tekortkomingen op het gebied van rekenvaardigheden van leerlingen van onze school. De resultaten van dit onderzoek worden gebruikt als de basis voor het ontwikkelen van een onderwijsmethode voor klas 1, die goed aansluit op het vaardigheidsniveau van leerlingen, opdat leerlingen in de toekomst zonder probleem het rekenvaardigheidsexamen kunnen afleggen en het wiskunde onderwijs succesvoller kunnen volgen. Voor dit onderzoek is gekozen voor eerstejaars leerlingen, zij staan tenslotte aan het begin van hun schoolcarrière en de onderzochte basisvaardigheden behoren tot het lesprogramma van de basisschool.

3.1 Onderzoeksvragen

Hoofdvraag 1

Zijn alle eerste klas leerlingen binnen het gymnasiale onderwijs van onze school voldoende[11] vaardig in het, zonder rekenmachine, oplossen van rekenkundige basisschoolbewerkingen met natuurlijke, decimale breuken en breuken?

Een leerling behoort tot de groep 'zwakke' rekenaars als hij tot de 20% slecht scorende leerlingen van de totaal geteste groep behoort. De docenten wiskunde vinden dat het gewenste niveau bereikt is als een leerling de goede uitkomst bij 60-70%[12] van de opgaven van een type bewerking genereert en daarbij een adequate oplossingsstrategie kiest. Deze richtlijn is aangehouden voor het beoordelen van het gemiddelde niveau van de onderzochte groep leerlingen en van de resultaten van de interventie.

Deelvragen

1. Bestaat er een gerandomiseerde signaleringstoets waarmee ik leerlingen op hun verticale rekenvaardigheden zoals hieronder beschreven kan testen?
2. Kom ik met mijn zelf ontwikkelde test ´zwakke´rekenaars uit de eerste klas gymnasium op het spoor?

[11] Als *voldoende* wordt beschouwd dat leerlingen gebruik maken van *adequate oplossingsstrategieën* passend bij de verschillende rekenkundige bewerkingen. Een adequate oplossingstrategie is een oplossing die leidt tot het *goede* antwoord en die in *voldoende tempo* wordt toegepast, zodat deze niet belemmerend werkt bij het afmaken van de toets in de beschikbare tijd.

[12] Afhankelijk van het type bewerking; zie par. 3.2.1

3. Welke oplossingsstrategieën voor onderstaande bewerkingen kiezen de leerlingen?
4. Met welk type bewerkingen hebben de leerlingen problemen? Zijn er problemen met bepaalde getalsstructuren? (bijv. komma getallen, breuken, grote getallen)

De bewerkingen die ik in dit onderzoek gekozen heb zijn:

- Hoofdrekenen[13]: Omgaan met tafels en eenvoudig hiervan af te leiden delingen/vermenigvuldigingen.
- Vermenigvuldigen met ééncijferige en meercijferige getallen, gehele getallen en decimale breuken.
- Delingen met ééncijferige (deler) en meercijferige getallen (deeltal), natuurlijke getallen en decimale breuken.
- Volgorde van bewerkingen (-,+,x,: ())
- Bewerkingen (-,+,x,:) met breuken waarbij de teller ééncijferig is en de noemer één of tweecijferig is. Volgens de leerlijn van Tule hebben leerlingen de formele adequate oplossingsstrategie voor delen en vermenigvuldigen met twee breuken op de basisschool niet geleerd, maar binnen de sectie wiskunde is men benieuwd hoeveel leerlingen deze wel kennen. Wel hebben zij geleerd d.m.v. verhoudingen met breuken opgaven op te lossen.

Hoofdvraag 2

Resulteert een gerichte training met de traditionele rekenmethode, die gebaseerd is op een directe instructie en automatiseren, tot verbetering van de gesignaleerde tekorten in de rekenvaardigheden van `rekenzwakke´ leerlingen? Voldoende niveau is door de docenten wiskunde geformuleerd als 70% van de opgaven een goede uitkomst hebben.

Deelvragen

1. Bij welke van bovenstaande bewerkingen hebben leerlingen problemen? Zijn er problemen met bepaalde getalsstructuren? (bijv. decimale breuken, breuken, complexe grote getallen) Dus welke onderdelen moet het interventieprogramma bevatten?

[13] Hoofdrekenen. Een leerling kan vlot, handig en inzichtelijk bewerkingen uitvoeren. Waar nodig mag een berekening opgeschreven worden. (Expertgroep doorlopende leerlijnen, 2008)

2. Is het traditionele rekenonderwijs een methode om bij rekenzwakke leerlingen snel en efficiënt de leemtes op te vullen?

3.2 De rekentoets en het vervolg.

Om een antwoord te geven op bovenstaande vragen ben ik met een onderzoek gestart naar een signaleringstoets op het gewenst niveau, die de leerlingen test op de verschillende basisvaardigheden van hoofdrekenen en algoritmes. Zie voor de gevolgde procedure en tijdpad, bijlage 3. De toets moet concreet informatie opleveren over de volgende vragen:

1. Zijn de tafels tot en met 10 declaratieve[14] kennis, zowel bij delingen als bij vermenigvuldigingen?
2. Beschikken de leerlingen over de procedurele kennis en vaardigheid om snel eenvoudige[15] vermenigvuldigingen en delingen van ééncijferige met tweecijferige getallen op te lossen als hoofdrekentaak?
3. Is de volgorde van bewerkingen (-,+,x,:) tot declaratieve kennis omgezet?
4. Is alle procedurele kennis[16] en vaardigheid [17]aanwezig om delingen en vermenigvuldigingen van meercijferige natuurlijke en decimale getallen, en bewerkingen met breuken goed in tempo uit te voeren?
5. Zijn metacognitieve kennis en vaardigheden voldoende ontwikkeld?

Na scoring van de toets kunnen ‘ rekenzwakke’ leerlingen op vrijwillige basis meedoen aan extra lessen. De extra lessen worden modulair opgesteld en worden afgesloten met een toets. De vorderingen t.o.v. de begintoets kunnen zo in kaart gebracht worden en zullen de basis vormen voor het nieuw te ontwikkelen rekenprogramma voor klas 1,2,3 (zie onder 3.3)

3.2.1. Overwegingen bij het samenstellen van de toets

Uitgangspunten bij de samenstelling van de toets waren de volgende overwegingen:

[14] Declaratieve kennis: feitenkennis (Ruijssenaars & Luit, 2006)
[15] Het begrip eenvoudig wordt hier gedefinieerd als uitkomsten van de vermenigvuldigingen op gehele tweecijferige of kleine driecijferige getallen
[16] Procedurele kennis:weten hoe iets gedaan moet worden bewust of onbewust(A.J.J.M. Ruijssenaars, van Luit 2006)
[17] Procedurele vaardigheid: de kennis is aanwezig, alsook de vaardigheid om zonder teveel rekenfouten en omslachtige methodes het antwoord te genereren

1. In de rekentoets mogen geen context vraagstukken staan. Uit onderzoek (Hickendorf & Janssen, 2009) is naar voren gekomen dat taalniveau, met name bij allochtone leerlingen, invloed kan hebben op de prestaties van leerlingen. Het gaat dus om `kale´ rekensommen. Onze school heeft ± 30% allochtone leerlingen.
2. De bewerkingen staan genoemd in de referentiekaders 1S voor het basisonderwijs en mogen dus als zodanig bekend worden verondersteld bij de leerlingen. Een uitzondering moet gemaakt worden voor de bewerking vermenigvuldigen en delen met twee breuken. Al blijkt uit de theorie dat we er niet van uit mogen gaan dat de gemiddelde leerling alle bewerkingen volledig geautomatiseerd heeft. Naar mijn mening echter en die van de docenten wiskunde hebben wij op het gymnasium te maken met de` knapste ´leerlingen van de basisschool. Deze leerlingen hebben meestal extra uitdaging nodig en hebben in groep 8 dus voldoende tijd gehad om kennis en vaardigheid op het gebied van de bewerkingen op te doen, te automatiseren en de formele oplossingsstrategie voor delen met breuken aan te leren.
3. Uit de kritiek van experts n.a.v. de analyse van (inter-)nationaal onderzoek blijkt, zoals beschreven in de theorie, dat de procedurele kennis en vaardigheid van algemeen geldende strategieën voor vermenigvuldigen, delen en breuken onvoldoende is bij veel leerlingen,
4. De toets moet binnen 50 minuten, één lesuur, af te ronden zijn.

De rekentoets (zie bijlage 4) valt globaal gezien uiteen in twee onderdelen. Deel 1 bestaat uit vermenigvuldigingen en delingen als hoofdrekentaak (resp. toets 1 en 2). Deel 2 bestaat uit opgaven met de basisvaardigheden te weten volgorde van bewerkingen, vermenigvuldigen, delen en bewerkingen met breuken (resp. toets I t/m IV). De totale toets is vooraf op zijn uitvoerbaarheid getest door een goede rekenaar uit klas 2 en besproken met één van de docenten wiskunde in klas 1. Voor elk van de onderdelen 1 en 2 krijgen de leerlingen 2 minuten. De resterende tijd is voor de onderdelen I-IV, ± 40-45 minuten. Gekozen bewerkingen moeten uitgeschreven worden op de toets.
Het aantal fouten voor toets 1 en 2 is afzonderlijk geïnventariseerd. Voor het bepalen van de declaratieve kennis van de tafels 0-9 zijn de fouten van de eerste 10 opgaven van toets 1 en 2 tesamen geïnventariseerd. Voor de toetsonderdelen I t/m IV is dit

per onderdeel gebeurd. Daarnaast is per leerling het totaal aantal fouten voor de onderdelen I t/m IV geïnventariseerd.
Als grens voor de selectie van ‘rekenzwakke’ leerlingen per onderdeel is de 80-20% regel toegepast. Voor de beoordeling van het gewenste niveau van de leerlingen heb ik de docenten de toets voorgelegd en per onderdeel gevraagd welk niveau zij willen nastreven. Voor toets 1 en 2 zijn ze tevreden als een leerling resp. 19 (63%) en 17 (68%) goede antwoorden geven. Voor toetsonderdeel I, II, III geven ze aan dat zij tevreden zijn als leerlingen 70% van de opgaven goed beantwoorden. Voor het onderdeel IV bewerkingen met breuken gaven zij als norm aan 60%. Voor een uitgebreide verantwoording zie bijlage 5.

3.3 Interventieprogramma vermenigvuldigen en delen.

Ter voorbereiding van het te ontwikkelen rekenprogramma ben ik een interventieprogramma gestart met een aantal rekenzwakke leerlingen. Daarbij is ervan uitgegaan, gezien de Cito scores, dat het inzicht van de leerlingen in het vermenigvuldigen en delen goed is en op formeel niveau ligt. Op basis van de evaluatiegesprekken met de docenten en de literatuur heb ik gekozen voor de traditionele (functionele) rekenmethode. Het doel is leerlingen de traditionele algoritmes volgens de traditionele rekenmethode te leren en wel om een aantal redenen:

1. Het traditionele cijferend rekenen vereist inzicht in vermenigvuldigen, maar als dit inzicht aanwezig is, leidt het naar mijn mening en die van de docenten wiskunde tot minder fouten, omdat slechts de tafels van 0-9 bekend moeten zijn.
2. De traditionele staartdeling vereist inzicht in delen en goede kennis van de tafels, maar als dit inzicht en die kennis aanwezig zijn, leidt deze methode tot een kortere bewerking, eenvoudigere vermenigvuldigingen en dus minder fouten.
3. De kolomsgewijze aanpak en staartdeling met gehele getallen wordt ook ten onrechte als twee tegengestelde eindvormen geafficheerd, terwijl de kolomsgewijze aanpak juist bedoeld is als inzichtelijke opmaat naar cijferlogaritme (Heuvel-Panhuizen, 2009).

4. Het tekort aan zowel procedurele als metacognitieve kennis en vaardigheid wordt veroorzaakt door een gebrek aan kennis, automatisering en systematisch aanleren van efficiënte rekenstrategieën met complexere getallen (Craats, 2007). Eén van de kwaliteiten van de traditionele rekenmethode.

3.3.1 Invulling van het interventieprogramma.

De rekenzwakke leerlingen zijn geselecteerd op basis van de individuele score op de onderdelen vermenigvuldigen en delen. De leerlingen hebben op basis van vrijwilligheid meegedaan aan een modulair opgezet interventieprogramma. De ouders van rekenzwakke leerlingen zijn op de hoogte gesteld d.m.v. een brief om zo de motivatie voor deelname te verhogen (zie ook bijlage 6).
Op basis van de bevindingen (zie conclusies) uit de toets zijn twee modules voor bewerkingen resp. vermenigvuldigen en delen, met natuurlijke getallen en decimale breuken. Beide modules bestaan uit 4 lessen van één uur met huiswerk en worden afgesloten met een kleine toets. Leerlingen krijgen systematisch algemeen geldende procedures aangeleerd en oefenen deze systematisch in steeds complexere getalsstructuren. Voor het delen is ook de procedurele kennis van de omzetting van `rest´ naar decimaal getal besproken. Het interventieprogramma en lesopzet zijn bijgevoegd in bijlage 7 en 8. Overwegingen voor de opzet van het interventieprogramma zijn geweest:

1. Het realistisch rekenen heeft te weinig aandacht voor het automatiseren en oefenen van rekenvaardigheden. Goede rekenvaardigheden worden ook bewerkstelligd door veel opgaven te oefenen waardoor de leerling vertrouwd raakt met de procedure. Daarna kan de leerling eventueel nadenken over het waarom. (Gelderblom, 2008. p 22)
2. Automatiseren zorgt ervoor dat het werkgeheugen niet meer belast wordt. (Gelderblom, 2008. p 40). Voor onze leerlingen een belangrijk punt, omdat zo het tempo verhoogd wordt en geheugenruimte gebruikt kan worden voor de complexe wiskunde.
3. Een directe sturende didactiek en meer tijd voor automatiseren verbetert de resultaten van rekenzwakke leerlingen. (Gelderblom, 2008. p 33-36)

3.4 Betrouwbaarheid en validiteit

De betrouwbaarheid wordt uitgedrukt in herhaalbaarheid en nauwkeurigheid van de meting. (Harinck, 2010)

3.4.1 Herhaalbaarheid

De herhaalbaarheid van de toets is door het aantal deelnemers beperkt. ± 100 leerlingen (4 van de 5 eerste klassen) was voor mij maximaal haalbaar. Het aantal is voor een dergelijke toets met een homogene groep leerlingen naar mijn mening voldoende om een redelijk betrouwbaar beeld te geven. Om de herhaalbaarheid te verhogen zou de groep groter moeten zijn, maar de herhaalbaarheid wordt echter ook bepaald door de condities van toetsafname. Op de condities kom ik daarom hieronder terug.

3.4.2 Nauwkeurigheid

De nauwkeurigheid van het onderzoek wordt bepaald door de analyse van de afzonderlijke toetsen. Het type bewerkingen is gegroepeerd in de toets en afzonderlijk per leerling beoordeeld. Dit zorgt ervoor dat van elke leerling gezegd kan worden welk type bewerking wel en niet goed geautomatiseerd is. Bij de analyse is naast het type bewerking ook onderscheid gemaakt in type getalsstructuur (bewerking met decimale breuken of natuurlijke getallen) en type fout (rekenfout, methodefout). Met deze aanpak ontstaat een zo goed mogelijk beeld van de procedurele kennis en vaardigheden voor de verschillende bewerkingen met verschillende getalsstructuren en metacognitieve kennis.

3.4.3 Validiteit

De validiteit is naar mijn mening goed. De opgaven zijn bewust uitgezocht om de declaratieve kennis en procedurele vaardigheden met eenvoudige (toets 1 en 2) en complexere getalsstructuren (toets I-IV) te testen. Hierbij is bij het vermenigvuldigen en delen gekozen voor complexere getallen, omdat procedures voor delen en vermenigvuldigen al in de kerndoelen van groep 6 en 7 genoemd worden. Het omgaan met de informele benadering voor het oplossen van bewerkingen (m.n. vermenigvuldigen en delen) met breuken wordt pas in groep 8 behandeld. Daarom zijn voor deze werkingen niet te complexe opgaven opgenomen.

De meeste typen opgaven komen ook minimaal in tweevoud voor en waar mogelijk in oplopende moeilijkheidsgraad. De kans op eventuele foutieve analyses van procedurele kennis en vaardigheid wordt daarmee zo veel mogelijk verkleind.
De opgaven van de toets onderdelen I t/m IV zijn in detail geanalyseerd om te komen tot een goed interventieprogramma.
Een mogelijk probleem is de beschikbare tijd voor de toets I-IV. Leerlingen hebben in deze opzet weinig extra tijd. Het niveau van de leerlingen is lager dan de docenten denken. Met name op het gebied van metacognitieve kennis en vaardigheden zijn de resultaten door de condities van de toetsafname mogelijk discutabel.
De hoofdrekentoetsen (toets 1, 2) hebben voldoende lengte om goed onderscheid te maken tussen snelle goede rekenaars en minder goede zwakke rekenaars, zoals ook zal blijken uit de resultaten.

3.4.4 Condities afname toets

Leerlingen weten van te voren niet dat er een toets komt, maar omdat de ervaring leert dat leerlingen erg schrikken van onverwachtse overhoringen, worden zij voor aanvang gerustgesteld met de mededeling dat het gaat om basisschool rekenvaardigheden en dat de toets niet meetelt voor het rapportcijfer. Op deze manier kan ik voorkomen dat zoals bij de Cito toetsen op de basisschool vaak gebeurt, thuis nog snel de vaardigheden geoefend worden. De rekenvaardigheden moeten net als in een proefwerk wiskunde, waarbij de basisvaardigheden ook niet opgegeven worden als leerstof, dusdanig goed geautomatiseerd zijn dat zij geen belemmering vormen bij het oplossen van wiskundige opgaven. Deze aanpak verhoogt de validiteit.
De test is tijdens de wiskundeles afgenomen bij de eigen docent wiskunde in de ochtenduren. Dit heeft twee voordelen. Leerlingen zijn nog niet moe en de docent en ik kunnen samen surveilleren. Onverwachtse onduidelijkheden in de toets (zoals tijdens de afname van het onderdeel *delen* over de schrijfwijze van de deling) kunnen snel hersteld worden. De motivatie wordt verhoogd door de toets af te nemen in de wiskunde les en door de aankondiging van de docent dat het belangrijk is dat de toets serieus gemaakt moet worden en dat leerlingen die testonderdelen onvoldoende maken extra les zullen krijgen. Ik heb ook bij geen van de leerlingen gemerkt dat de toets bewust slecht gemaakt is. Dit heeft met de voorgaande omstandigheden de validiteit en de herhaalbaarheid verbeterd.

Bovenstaande opzet en voorzorgsmaatregelen hebben ertoe geleid dat de afname van de toets geoptimaliseerd is en gestandaardiseerd, waardoor de betrouwbaarheid en validiteit van de uitkomsten is verhoogd.

3.4.5 Ethiek

Alle resultaten zijn anoniem opgenomen in het onderzoek. Ouders en leerlingen zijn niet van te voren op de hoogte gesteld van de toets omdat docenten onverwachts toetsen mogen afnemen bij leerlingen. De ouders van leerlingen die benaderd zijn voor de interventie, zijn door middel van een brief op de hoogte gesteld. Toestemming lijkt niet nodig omdat deelname aan de interventie niet verplicht is gesteld.

Hoofdstuk 4 Data analyse en resultaten

Zoals eerder is aangegeven bestaat de rekentoets uit 2 onderdelen te weten; toets 1 en 2 zijn hoofdrekentaken (par. 4.1) en de toets I t/m IV is cijferend rekenen (par. 4.2).

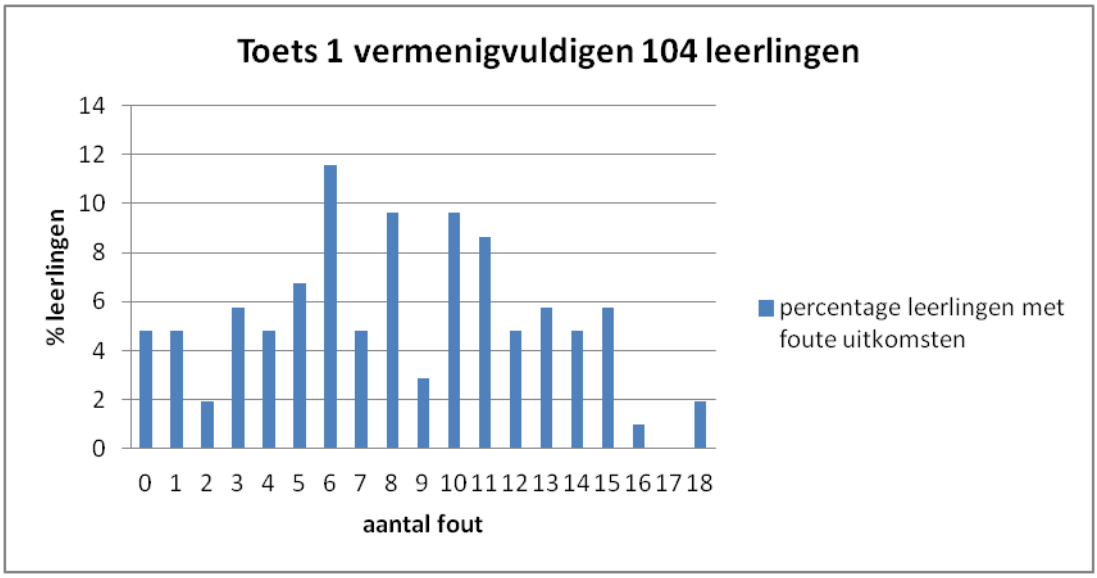
4.1. Data analyse toets 1, 2

4.1.1 Hoofdrekenen toets 1 vermenigvuldigen

In toets 1 moeten de leerlingen uit het hoofd zoveel mogelijk opgaven maken in twee minuten. Getest is de declaratieve kennis van het vermenigvuldigen met veel voorkomende tafels met natuurlijke getallen. Daarnaast zijn procedurele vaardigheden van het hoofdrekenen van het vermenigvuldigen getest.

De resultaten van de eerste toets staan weergegeven in grafiek 1

Het aantal fouten wordt bepaald door opgaven die niet gemaakt zijn dan wel een foute uitkomst hebben. 12 leerlingen hebben de gehele toets gemaakt, wat neerkomt op 12% van de leerlingen. Gemiddeld genomen hebben de leerlingen 8 fout.



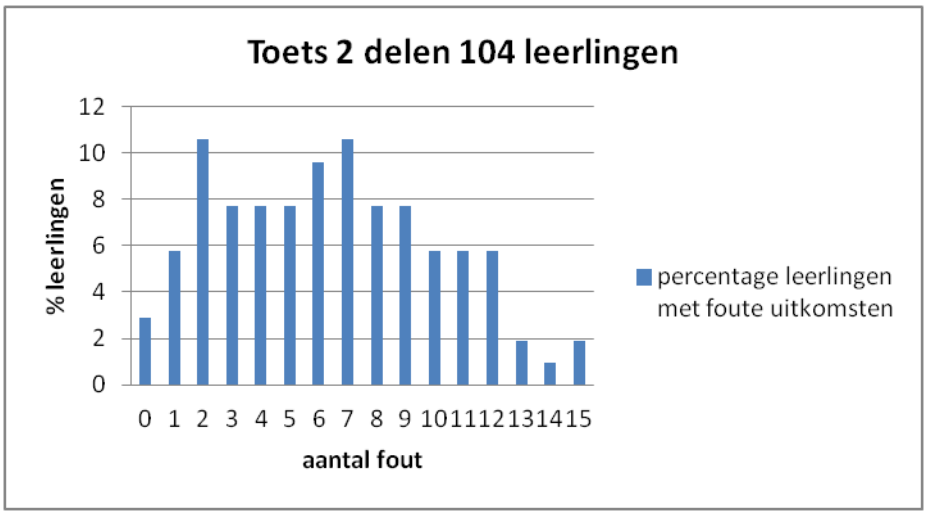
Grafiek 1 Resultaten Toets 1 vermenigvuldigen; 30 opgaven (104 leerlingen)

Dit betekent dat gemiddeld genomen de leerlingen 77% van de opgaven goed beantwoord hebben.

76% van de leerlingen voldoet aan de norm van de docenten[18]. Uitgaande van de 80%- 20% regel, de norm voor ´zwakke´ rekenaars, blijken 20 leerlingen 13 of meer fouten te hebben. Zij hebben maximaal 57% van de opgaven goed beantwoord.

4.1.2 Hoofdrekenen toets 2 delen

In toets 2 moeten de leerlingen uit het hoofd zoveel mogelijk opgaven maken in twee minuten. Getest is de declaratieve kennis van delen met veel voorkomende tafels. Daarnaast zijn procedurele hoofdrekenvaardigheden van het delen getest.
De resultaten van de tweede toets staan weergegeven in grafiek 2

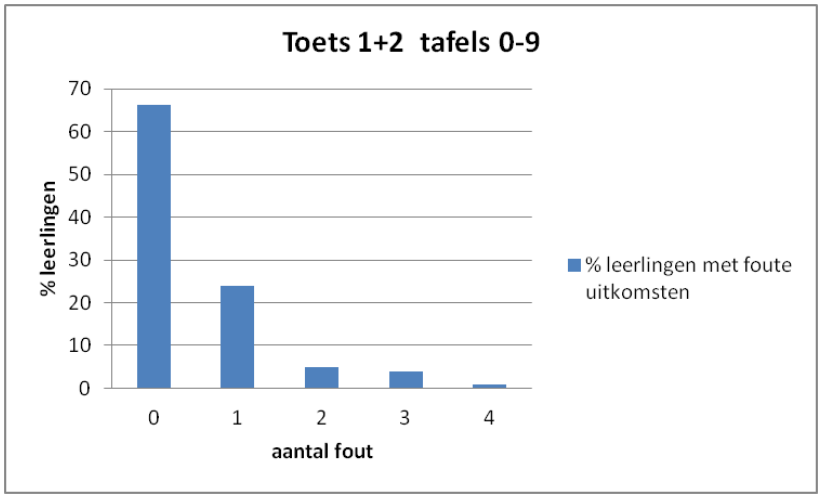


Grafiek 2 Resultaten Toets 2 delingen; 25 opgaven (104 leerlingen)

Het aantal fouten wordt bepaald door opgaven die niet gemaakt zijn en opgaven met een foute uitkomst. 12% van de leerlingen heeft de toets af. Gemiddeld genomen hebben de leerlingen 6 fout. Dit betekent dat gemiddeld de leerlingen 76% van de opgaven goed hebben.
70% van de leerlingen voldoet aan de norm van de docenten.
Uitgaande van de 80%- 20% regel, blijken 17 leerlingen 11 of meer fouten te hebben. Dit komt erop neer dat leerlingen maximaal 56% van de opgaven goed beantwoord hebben in 2 minuten.
Om de declaratieve kennis van de tafels van 0-9 te bepalen, heb ik het aantal fouten van de eerste 10 opgaven van toets 1 en 2 tesamen geïnventariseerd. In grafiek 3 is te zien dat 90% van de 104 leerlingen 0 of 1 foute uitkomst heeft bij vermenigvuldigingen of delingen met de tafels 0-9. 5 leerlingen maken 3 of 4 fouten

[18] Norm 19 goede antwoorden (63%).

en behoren tot de ´rekenzwakke´ groep. Zij hadden 80-85% van de opgaven goed beantwoord.



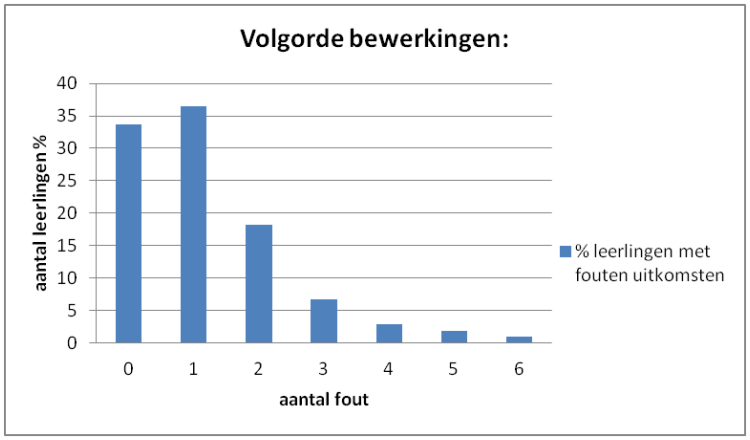
Grafiek 3 Resultaten Toets 1+2; 20 opgaven; 0-9 tafels delen en vermenigvuldigen (104 leerlingen)

4.2 Data analyse toets I-IV

4.2.1 Toetsonderdeel I Volgorde bewerkingen

Doel van dit onderdeel was de declaratieve kennis van volgorde van de bewerkingen, `(), +,- ,x ,: ´, te testen.

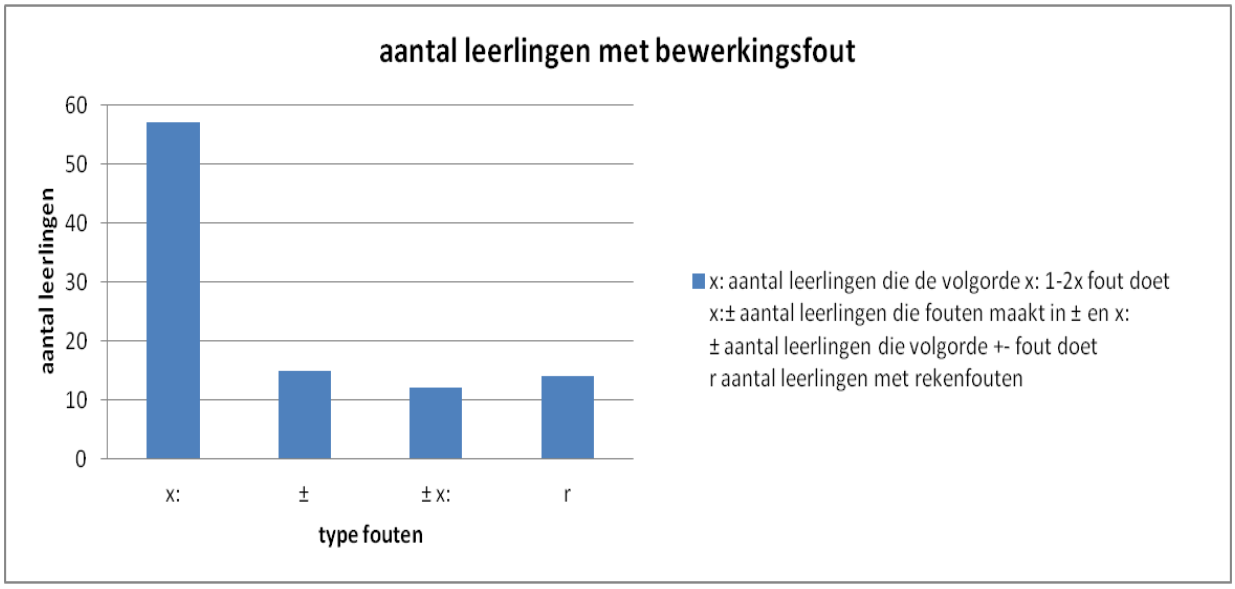
De resultaten van toetsonderdeel I staan weergegeven in grafiek 4



Grafiek 1 Volgorde bewerkingen 7 opgaven 104 leerlingen

Gemiddeld hebben de leerlingen in 1 van de 7 opgaven een fout gemaakt. 89% van de leerlingen voldoet aan de norm van de docenten. 13 leerlingen hebben 3 of meer foute bewerkingen gedaan en behoren tot de ´rekenzwakke´ groep.

Onder rekenfouten vallen (r): delen van de opgaven vergeten, optel-, aftrek-, vermenigvuldigings-, delingsfouten.



Grafiek 2 Type fouten (104 leerlingen)

Ten behoeve van het interventieprogramma is ook het type fouten geanalyseerd en weergegeven in grafiek 5. Zoals is af te lezen hebben 57 van de 104 (55%) leerlingen 1 of beide opgaven (opgave 3 en 6) fouten gemaakt in de volgorde van de bewerkingen x en :. Bij nadere analyse[19] blijkt dat opgave 3 (90:3x5=) verreweg het meest fout is gedaan. Leerlingen vermenigvuldigen eerst voordat ze de deling doen. 12 leerlingen (12%) maken fouten zowel in de volgorde van bewerking -,+ als ook x,: of combinaties van beide in 1 opgave. De bewerking met de haakjes wordt door iedereen goed uitgevoerd.

4.2.2 Toetsonderdeel II Vermenigvuldigen

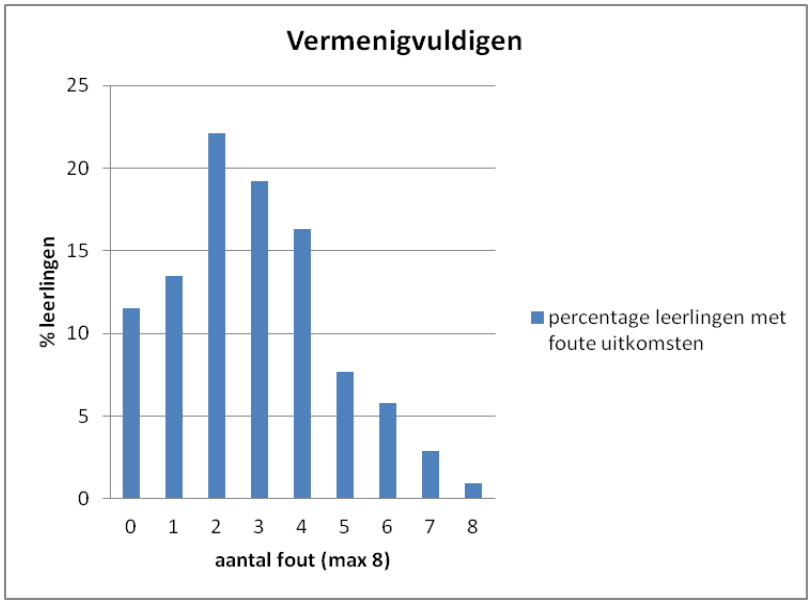
Doel van dit onderdeel is na te gaan of de procedurele kennis en vaardigheid van adequate oplossingsstrategieën voor vermenigvuldigen met natuurlijke en decimale breuken voldoende is. Daarnaast is op het kwalitatieve vlak gekeken naar de metacognitieve vaardigheden.

De resultaten van toetsonderdeel II staan weergegeven in grafiek 6.

[19] Analyse ruwe resultaten, niet bijgevoegd

Gemiddeld hebben de leerlingen 3 foute uitkomsten uit 8 opgaven. 66% van de leerlingen heeft dus minimaal 64% van de opgaven goed. Deze groep voldoet aan de norm van de docenten[20].

Uit de test komen 18 ‘rekenzwakke’ leerlingen (17%). Zij hebben 5 of meer fouten gemaakt.

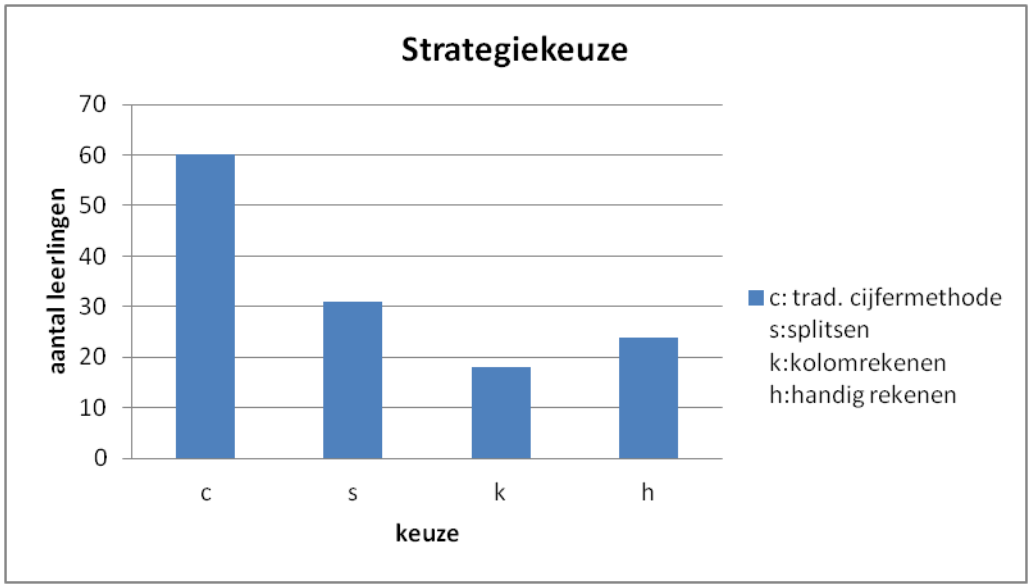


Grafiek 3 Resultaten Toets II vermenigvuldigen (104 leerlingen)

Voor het opstellen van een doelgericht interventieprogramma heb ik een nadere analyse gedaan. In grafiek 7 is de analyse van de gekozen oplossingsstrategie genoteerd. De verkorte cijferende methode (58%) wordt door de meeste leerlingen toegepast. Niet duidelijk uit de gegevens is op te maken of het hier gaat om de verkorte moderne methode[21] of de traditionele cijfermethode. De handige rekenmethode wordt door 23% van de leerlingen toegepast.

[20] Norm is 70% goed. Dit betekent 5-6 goede antwoorden.

[21] Bij de verkorte moderne methode lijkt meer op splitsend rekenen, maar dan onder elkaar. Eén getal wordt gesplitst en direct met het gehele andere getal vermenigvuldigd. Duidelijk is aan het type rekenfouten dat een aantal leerlingen gebruik maakt van deze methode.



Grafiek 4 aantal leerlingen met strategie keuze (104 leerlingen)

aantal II	type fouten
74	r
36	k
11	m

tabel 1 aantal leerlingen met type rekenfouten (104 leerlingen)
r: rekenfouten (optel-,vermenigvuldigingsfouten)
k: fouten met decimale breuken
m: methode fout: leerlingen die aangeven niet te weten hoe ze de opgaven moeten uitrekenen en fout toepassen van de procedure.

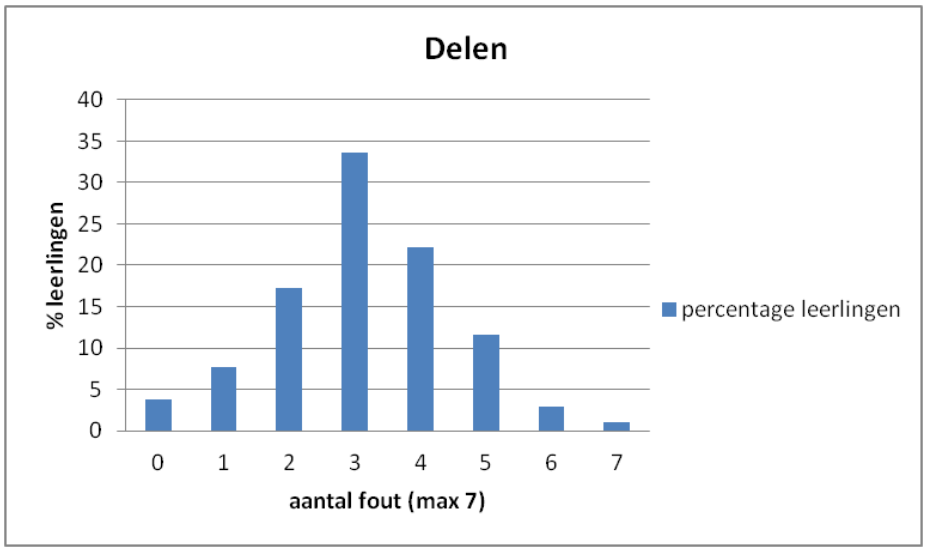
In tabel 1 valt af te lezen dat 34% (36 leerlingen) van de leerlingen problemen heeft met een vermenigvuldiging met decimale breuken. Bij het plaatsen van de komma in het antwoord maken zij veel fouten. Meestal doen de leerlingen dan ook alle of bijna alle opgaven met decimale breuken fout. Het inschatten op basis van afronding waar de komma moet staan, wordt weinig gedaan. Ondanks dat de leerlingen de opdracht krijgen de opgaven te controleren, maken ze toch nog veel rekenfouten.

4.2.3 Toetsonderdeel III Delen

Doel van dit onderdeel is na te gaan of de procedurele kennis en vaardigheid van adequate oplossingsstrategieën voor delen met natuurlijke en decimale breuken voldoende is. Daarnaast is gekeken naar de metacognitieve vaardigheden.
De resultaten van toetsonderdeel III staan weergegeven in grafiek 8.
Het gemiddeld aantal fouten per leerling is 3. 63% van de leerlingen heeft 3 of minder fouten en 29% van de leerlingen haalt de norm van de docenten[22].

[22] Norm 70%. Dit betekent 5 goed.

Tot de `rekenzwakke´ groep behoren 16 leerlingen (15%). Zij maken 5 of meer opgaven fout. 36% van de leerlingen heeft te weinig tijd om alle opgaven te maken en 15% heeft 2 of meer opgaven niet gemaakt (zie grafiek bijlage 9).



Grafiek 5 Resultaten Toets III delen percentage leerlingen vs. aantal fout (104 leerlingen)

Probleem komma, rekenfouten, tempo, methode deeltal met 0	Probleem aantal leerlingen
r	44
k	53
t	31
>2 t	12
m + 0	24
0	13

Tabel 2 Type fouten (104 leerlingen)
r: rekenfouten
k: kommafouten
t: tekort aan tijd
> 2t. meer dan 2 opgaven niet gemaakt
m+0: methode fouten
0: fouten door 0 in het deeltal

Ter voorbereiding op het interventieprogramma zijn de fouten verder geanalyseerd, zie tabel 2. 51% van de leerlingen heeft problemen met delingen met decimale breuken (k). Bij 11% van de leerlingen blijkt dat zij 2 of meer opgaven niet hebben gemaakt en dat de procedure niet voldoende is geautomatiseerd ofwel dat zij een niet-adequate oplossingsstrategie hebben gekozen. 23% van de leerlingen maken procedurele fouten.

In tabel 3 is geanalyseerd hoeveel leerlingen de procedurele kennis hebben om de `rest´om te zetten naar decimale quotiënten en in tabel 4 is de gekozen strategie geanalyseerd. 56% van de leerlingen beheerst de procedurele kennis voor de

omzetting van ´rest´ naar decimalen goed. 41% van de leerlingen geven alleen of deels antwoorden met rest of hebben onvoldoende procedurele kennis.

rest, decimaal, breuk	percentage leerlingen %
b,d	7
r,d	13
d	49
r	29
?	2

Tabel 3 rest omzetting in decimalen (104 leerlingen)

b,d: Zowel in breuken als decimalen
r,d: soms in rest, soms in decimalen
d: alleen decimalen
r: alleen in rest

Tabel 4 strategiekeuze (104 leerlingen)
?: onbekend
s:staartdeling
k:kolomsgewijs
v: vermenigvuldigen

Methode kolomgewijs/ Staart/ vermenigv	% leerlingen gekozen strategie
?	2
s	44
k	44
s,k	1
v	9

44% van de leerlingen gebruikt de staartdeling en 44% het kolomsgewijs delen (tabel 4). 10% van de leerlingen valt terug op de inefficiënte combinatieprocedure van hoofdrekenen en vermenigvuldigen of heeft geen idee hoe de opgaven aan te pakken.

Over de laatste opgave 24 km/uur=? m/s is moeilijk een betrouwbaar beeld te geven. Veel leerlingen hebben onvoldoende tijd deze opgave geheel te maken. Als er geen fouten in de methodiek staan en geen antwoord is gegeven of de leerling niet toegekomen is aan de opgaven, staan ze in tabel met een (n). Van de leerlingen maakt 35% methodefouten bij de omrekening van km naar meters of van uren naar seconden.

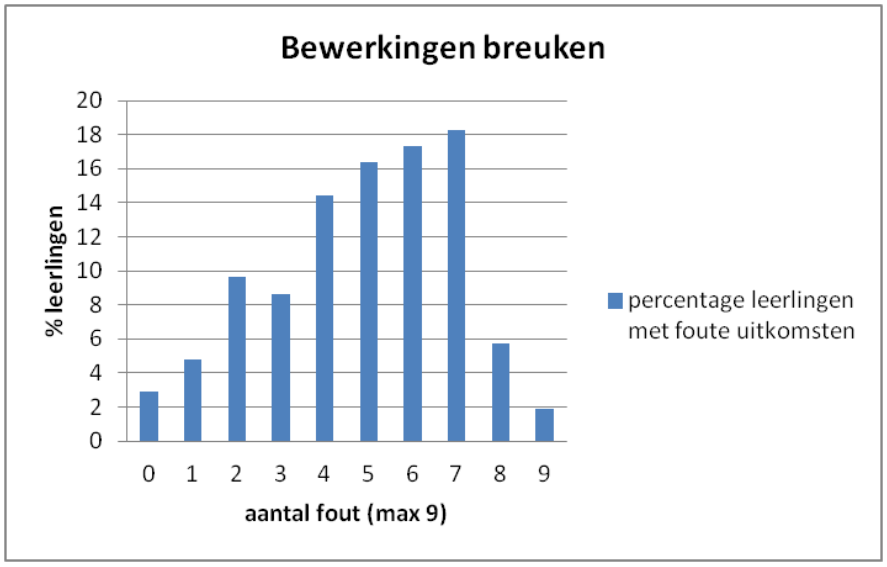
vraag 24km/u = ? m/s	Percentage leerlingen %
g	17
m	35
n	25
f	23

Tabel 5 Legenda: (104 leerlingen)
g: goed gemaakte opgave:
m: methodefout;
n: niet gemaakt;
f: rekenfout

4.2.4 Toetsonderdeel IV Bewerkingen met breuken.

Doel van dit onderdeel is na te gaan of de procedurele kennis en de vaardigheid in adequate oplossingsstrategieën voor de verschillende bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met breuken voldoende zijn. Totaal zijn er 9

opgaven, waarvan 4 optellingen en aftrekkingen, 3 vermenigvuldigingen, 2 delingen met breuken.
De resultaten van toetsonderdeel IV staan weergegeven in grafiek 10.

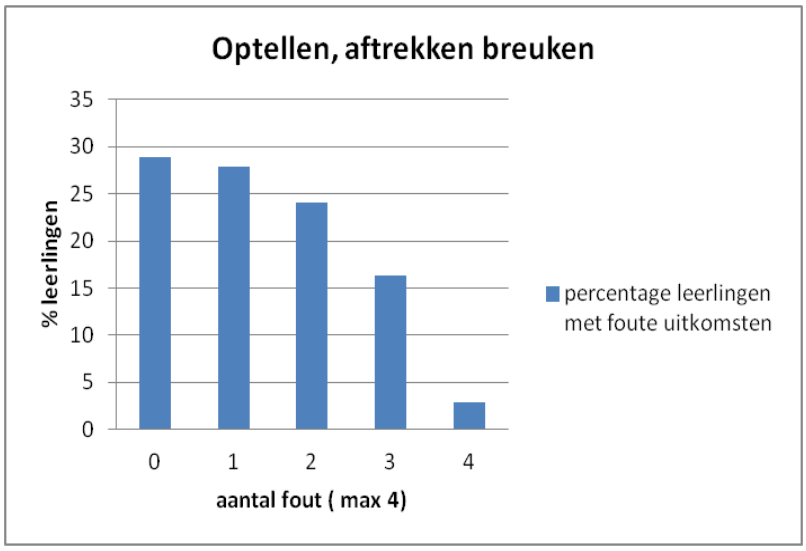


Grafiek 10 percentage leerlingen vs. aantal fout. 104 leerlingen. 9 opgaven

Gemiddeld hebben de leerlingen 5 fout. De 60% norm van de wiskunde docenten wordt door 41 % van de leerlingen behaald. De 9 rekenzwakke leerlingen hebben 8 of 9 fout. Dit onderdeel is mede slecht gemaakt omdat zeer veel leerlingen onvoldoende tijd hebben gehad om alle opgaven te maken. Deels is dit te wijten aan tekort aan beschikbare tijd. 32 leerlingen hadden alle opgaven gemaakt, 13 misten één opgave en 18 twee opgaven.
Tijdgebrek kan veroorzaakt worden door gebrek aan automatisering, kennis, door een te lange toets. In tabel 6 (zie bijlage 10) maakt een verband zichtbaar tussen het aantal fout en het aantal niet gemaakte opgaven.(voor uitleg zie legenda tabel). Ik heb dit gedaan om een onderscheid te kunnen maken tussen leerlingen met tijdgebrek en leerlingen met gebrek aan procedurele kennis of automatiseringsproblemen. Te zien is in de tabel dat 63 leerlingen (bijna) alle opgaven gemaakt hebben. Door de opzet van de tabel is ook duidelijk dat veel leerlingen bepaalde bewerkingen wel kunnen oplossen, maar hiervoor zoveel tijd nodig hebben dat ze niet meer aan de andere opgaven toekomen. De opgaven die niet gemaakt zijn, zijn meestal de delingen met breuken.

4.2.4.1 Bewerking: Optellen en aftrekken met breuken

In grafiek 11 zijn de resultaten gegeven voor toetsonderdeel IV, met specifiek de bewerking optellen en aftrekken van breuken.



Grafiek 11 percentage leerlingen vs. aantal foute opgaven (max.4) optellen en aftrekken breuken(104 leerlingen)

type fout methode (m), rekenfout en (r)	aantal leerlingen met fouten optellen aftrekken breuken
m	19
r	55

Tabel 7 Type fouten optellen aftrekken breuken 104 leerlingen
Legenda: m: methodefout
r: rekenfout

Bij het optellen en aftrekken van breuken had 86% van de leerlingen alle opgaven gemaakt. 14% had 1 of meer opgaven niet gemaakt door tijdgebrek of onvermogen.
In grafiek 11 is af te lezen dat het gemiddeld aantal fouten 1 is.
57% van de leerlingen voldoet aan de norm van de docenten.
20 leerlingen behoren tot de `rekenzwakke´ groep met 3 of 4 foute uitkomsten.
In tabel 7 is te zien dat 19 leerlingen (18%) methodefouten maken. Iets meer dan de helft van de leerlingen maakt één of meer rekenfouten. Veel fouten[23] maken zij bij het

[23] Analyse ruwe resultaten, niet bijgevoegd

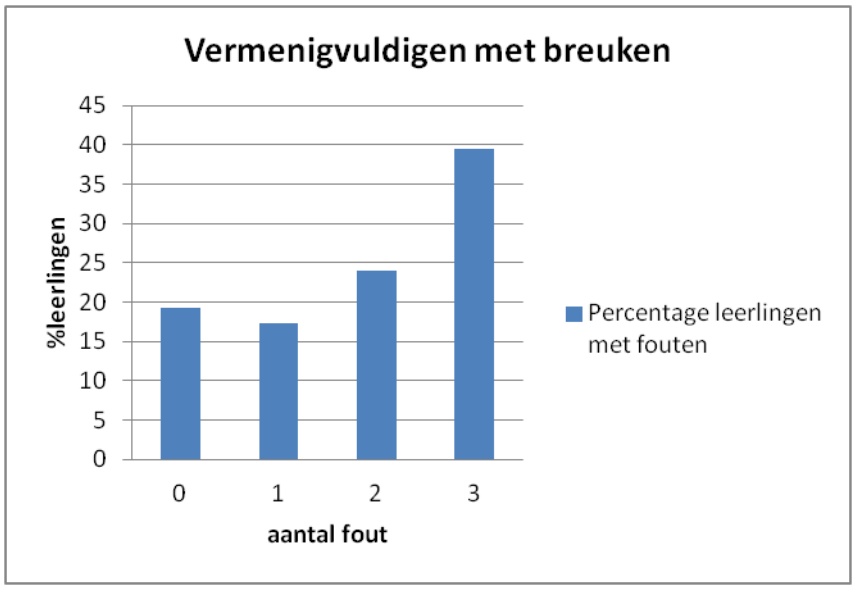
optellen van samengestelde breuken[24] en het gelijkmaken van de noemers. Twee opvallende zaken[25] t.a.v. de gebruikte methode zijn:

a) Dat 1/3 van de leerlingen voor het gelijkmaken van de noemers de noemers vermenigvuldigt i.p.v. op zoek gaat naar de kleinste gemene deler. Dit zorgt voor veel rekenfouten en is erg tijdrovend.

b) Dat het gelijkmaken van de noemers resulteert in breuken in de tellers. Een methode die vaak tot rekenfouten leidt.

4.2.4.2 Bewerking: Vermenigvuldigen breuken

In grafiek 12 zijn de resultaten gegeven voor toetsonderdeel IV, met specifiek de bewerking vermenigvuldigen van breuken.



Grafiek 12 percentage leerlingen vs. aantal foute opgaven (max.3) vermenigvuldigen met breuken (104 leerlingen)

Het gemiddelde aantal fout is 2. 37% van de leerlingen maakt 0 of 1 fout.

Bijna de helft van de leerlingen maakt methodefouten (tabel 8). Ofwel de leerlingen weten niet hoe de opgaven aan te pakken ofwel ze maken de noemers eerst gelijk en

[24] Samengestelde breuk: natuurlijk getal met een breuk, bijv. $2\frac{2}{15}$

[25] Analyse ruwe resultaten, niet bijgevoegd

vermenigvuldigen daarna de tellers met elkaar. Twee opvallende zaken bij de keuze van oplossingstrategieën[26] zijn:

a) Dat veel leerlingen de noemers eerst gelijk maken alvorens het geheel te vermenigvuldigen. Dit kost veel tijd en zorgt voor veel rekenfouten.

b) Het wegstrepen van getallen boven en onder de streep om zo vermenigvuldigingen te vereenvoudigen is door 3 leerlingen toegepast. Dit betekent dat de procedurele kennis van het vereenvoudigen door bijna alle leerlingen niet in deze situatie herkend wordt. Het niet toepassen van deze kennis maakt deze twee opgaven tot zeer tijdrovende opgaven.

Tabel 8 Oorzaak van fouten
104 leerlingen
m: methodefouten
r: rekenfouten
t: tijdgebrek

type fout methode (m), rekenfouten (r) , tijd (t)	aantal leerlingen met fouten vermenigvuldigen breuken
m	50
r	20
t	13

4.2.4.3 Bewerking: Delen met breuken

De procedurele kennis van het delen met breuken is onbekend voor bijna de helft van de leerlingen. (Tabel 9). 42% (44 leerlingen) van de leerlingen kent de informele rekenmethode (berekening met verhoudingen). Dit leidt bij (16 leerlingen) 1/3 van hen tot 1-2 goede uitkomsten. De meesten begrijpen niet hoe zij de uitkomst moeten berekenen als ze eenmaal de verhouding hebben bepaald.

Delen aantal fout	aantal leerlingen	aantal leerlingen informele rekenmethode	aantal leerlingen formele rekenmethode	aantal leerlingen foute methode of geen antwoord
0	10	5	5	
1	14	11	3	
2	80	28	2	50

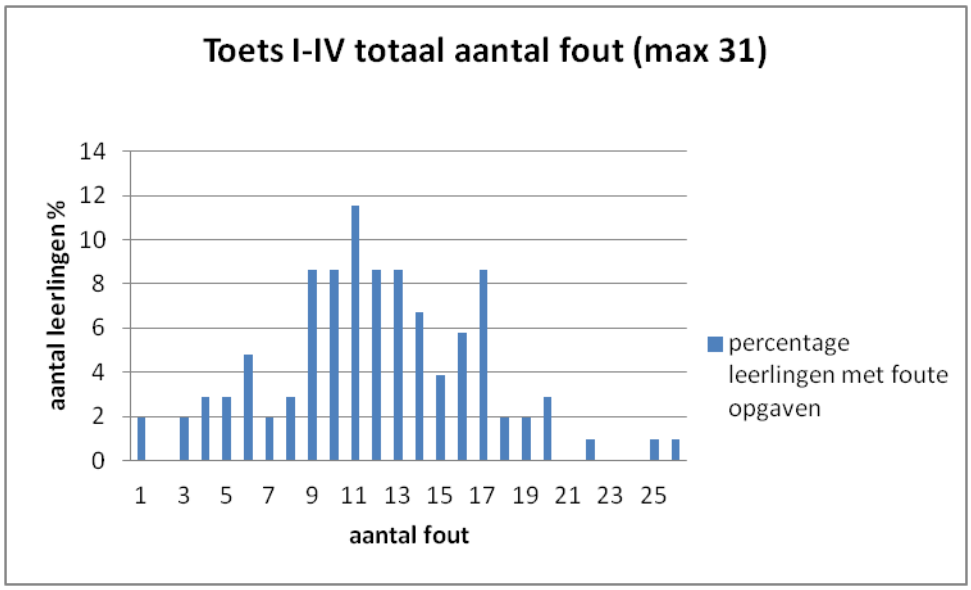
Tabel 9 Delen met breuken 104 leerlingen.2 opgave.

[26] Analyse ruwe resultaten, niet bijgevoegd

10% (10 leerlingen) van de leerlingen kent de formele rekenmethode. Dit zijn vooral de zeer goede rekenaars (3 fout of minder)[27]. De rest van de groep heeft ofwel aangegeven de opgaven niet te kunnen oplossen ofwel niets ingevuld.

4.2.4.4 Toets I-IV Totaal beeld.

In grafiek 13 zijn de resultaten gegeven voor toetsonderdeel IV, het totaalbeeld. Het gemiddeld aantal fouten is 12. Als voldoende beoordelen de docenten een toets als een leerling 70% van de onderdelen I,II,III en 60% van onderdeel IV goed beantwoord heeft. 48% van de leerlingen voldoet aan de ± 65% norm van de docenten. 19 leerlingen behoren tot de rekenzwakke leerlingen. Zij hebben 17 of meer fouten. 60-70% van de `rekenzwakke´ leerlingen per onderdeel[28] behoort tot deze groep.



Grafiek 13 Percentage leerlingen vs. aantal fouten voor de gehele toets I-IV(104 leerlingen)

4.3 Resultaten Interventieprogramma

4.3.1 Interventie vermenigvuldigen

18 leerlingen zijn persoonlijk uitgenodigd voor het interventieprogramma. Ik ben begonnen met 13 leerlingen, maar uiteindelijk hebben 8 leerlingen de eindtoets gemaakt.

[27] Analyse ruwe resultaten, niet bijgevoegd
[28] Analyse ruwe resultaten, niet bijgevoegd

In bijlage 12 staan de resultaten en analyse van toetsonderdeel II en de toets na interventie per leerling weergegeven. Af te lezen is dat twee leerlingen gebruik maken van de splitsstrategie en in tijdproblemen komen. De resultaten zijn sterk verbeterd. Geen van de leerlingen heeft nog methodefouten gemaakt. De rekenfouten zijn voornamelijk gemaakt in een complexe vermenigvuldiging[29] die een zeer geordende schrijfwijze vereist om fouten te voorkomen. Het gemiddeld aantal fouten is 1. Alle leerlingen voldoen aan de 70% norm.

4.3.2 Interventie delen

19 leerlingen zijn persoonlijk uitgenodigd. Ik ben gestart met 8 leerlingen. Uiteindelijk hebben 3 leerlingen de toets gemaakt, die ook al meededen met de module vermenigvuldigen. In bijlage 13 staan de resultaten en analyse van toetsonderdeel III en de toets na interventie per leerling weergegeven. Eén leerling behoorde niet tot de `rekenzwakke´ groep. Deze drie leerlingen hebben het gehele programma doorlopen. Twee leerlingen maken een methodefout. Zij plaatsen bij het opzetten van de staartdeling de deler op de plaats van het deeltal en voeren dus de verkeerde deling uitvoerden. De resultaten zijn verbeterd bij alle drie de leerlingen. Allen leerlingen voldoen aan de 70% norm.

[29] 35802 x 8835=

Hoofdstuk 5 Conclusies en discussie

Bestaat er een gerandomiseerde signaleringstoets voor verticale rekenvaardigheden?

Neen, uit mijn vooronderzoek blijkt dat er op dit moment geen toetsen op de markt verkrijgbaar zijn die de declaratieve kennis en procedurele kennis en vaardigheden van de basisbewerkingen met complexere getalsstructuren test.

Signaleert de door mij ontwikkelde toets `rekenzwakke´ leerlingen?

Ondanks het feit dat het hier om een relatief kleine groep leerlingen gaat, geven de resultaten aan dat de toets een goed beeld geeft van de procedurele vaardigheden en declaratieve kennis van de leerlingen op alle onderdelen. De toets voldoet dus aan de doelstellingen en geeft handvatten voor het verbeteren van het klassikale rekenonderwijs en voor modulaire interventie van kleine groepen leerlingen. Na analyse van alle data blijkt de toets iets te lang te zijn. In het vervolg zal ik toets 1 en 2 gescheiden van toets I-IV afnemen.

Analyse afzonderlijke toetsonderdelen.

Toetsonderdeel 1 en 2 bevat een deel waarbij de declaratieve kennis van de tafels onder de tien wordt getoetst (opgaven 1-10). Dit onderdeel wordt zo goed gemaakt door de leerlingen dat het geen valide beeld geeft van de declaratieve kennis. Ik vind het dan ook geen goed selectie middel, temeer ook schrijffouten, leesfouten of vergissingen mogelijk zijn. Deze opgaven komen te vervallen. De resultaten komen overeen met de resultaten van de Tempo Toets rekenen (TTR) (Vos, 1998) uit een eerder door mij gedaan onderzoek voor de module rekenen. De bekende TTR wil ik in de toekomst als alternatief gebruiken in de tweede lijn voor nadere analyse.
Toets 1 en 2 zullen uitgebreid worden met vergelijkbare opgaven. De lengte van de toets was goed. ± 10% van de leerlingen maakt alle opgaven.
De toetsonderdelen I-IV, waarbij de verschillende basisvaardigheden, (volgorde van bewerkingen, vermenigvuldigen, delen en bewerkingen met breuken) worden getoetst, voldoen goed en differentiëren goed tussen leerlingen die de basisvaardigheden met verschillende getalsstructuren goed en minder goed

beheersen. Met name de opgaven met complexere getalsstructuren in deze toets laat goed zien welke leerlingen goed en minder goed kunnen rekenen.
Zoals al eerder opgemerkt, moeten de leerlingen voor het onderdeel delingen en breuken meer tijd krijgen. Om meer tijd te genereren in de toekomst wil ik de toets in tweeën splitsen. De onderdelen I-IV kunnen waarschijnlijk dan goed in 50 minuten gemaakt worden en een beter beeld geven van de capaciteit van de leerlingen. Ook in hun metacognitieve vaardigheden kunnen we dan meer inzicht krijgen.
De 80%-20% regel als norm voor de rekenzwakke leerlingen is naar mijn mening en die van de wiskunde docenten te laag gekozen. In deze groep betekent dit dat voor de meeste onderdelen I-IV de leerlingen bijna alle opgaven fout beantwoord hebben. Aangezien deze norm in de toekomst pas een rol gaat spelen bij de tweedelijns interventie nadat het nieuwe rekenprogramma in klas 1 doorlopen is, kan hij voorlopig gehandhaafd blijven.
De 70% norm voor de onderdelen vermenigvuldigen en delen als gewenst resultaat lijkt gezien de resultaten van het interventieprogramma een goed gekozen norm. Over de norm voor de breuken kan ik geen uitspraak doen, omdat veel leerlingen tijdgebrek hebben gehad en geen goede procedurele kennis en vaardigheden hebben.

Hoofdvraag 1. Zijn alle eerste klas leerlingen binnen het gymnasiale onderwijs van onze school voldoende vaardig in het, zonder rekenmachine, oplossen van rekenkundige basisschool bewerkingen?

Hoofdrekentaken (toets 1,2)
De declaratieve kennis van de tafels (opgave 1-10) is over het algemeen zeer goed. 90% van de leerlingen maakt 0-1 fout. 5 leerlingen behoren tot de zwakke rekenaars. 4 van hen scoorden ook laag op andere onderdelen.
Ten aanzien van de resultaten van de gehele toets 1 en 2 voldoen de leerlingen gemiddeld genomen wel aan de verwachtingen. Respectievelijk 76% en 70% van de leerlingen voldoet aan de norm.
De declaratieve kennis en procedurele vaardigheden van delingen en vermenigvuldigingen van het hoofdrekenen is gemiddeld genomen goed. Al zijn mijn collega´s en ik het er wel over eens dat een aantal rekenzwakke leerlingen (totaal resp. 25 en 23 leerlingen) wel erg laag scoren. In tabel 11 (bijlage 11) is zichtbaar

dat 15 leerlingen over beide toetsen niet meer dan 32 opgaven goed opgelost hebben, waarvan 20 opgaven met de tafels 0-9 zijn. Deze leerlingen zullen volgend schooljaar begeleid worden.
Het resultaat is conform de verwachtingen. Het gaat hier om kennis en vaardigheid van kerndoel 27 die in groep 4 t/m 7 is opgedaan en voor een groot deel tot de vaardigheden van 1F niveau.

Aanbevelingen
Ondanks het goede resultaat, is het goed het hoofdrekenen te onderhouden en de hoofdreken strategieën te verbeteren.

Volgorde bewerkingen (toetsonderdeel I)
De declaratieve kennis van de volgorde van bewerkingen van de leerlingen is goed. 89% van de leerlingen voldoet aan de norm.
13 (12%) leerlingen behoren tot de groep `rekenzwakke´ leerlingen op dit onderdeel.

Aanbevelingen
De declaratieve kennis van de volgorde x en : moet op klassenniveau extra aandacht krijgen. Het lijkt erop dat dit fout aangeleerd wordt op de basisschool, omdat zoveel leerlingen van verschillende basisscholen dit fout doen en blijven doen ondanks herhaaldelijke meldingen van de wiskundedocenten. Naar mijn idee zou het inzicht voor de volgorde verbeterd kunnen worden als het verband tussen de notatie van een breuk en deling[30] gelegd wordt.

Vermenigvuldigen (toetsonderdeel II)

Gemiddeld hebben de leerlingen 3 foute uitkomsten uit 8 opgaven, wat erop neer komt dat 66% van de leerlingen minimaal 64% van de opgaven goed gemaakt had. 66% van de leerlingen voldoen bijna aan de 70% norm van de docenten (max. 3 fout). Ruim 36% valt dus onder de norm.
18 leerlingen behoren tot de rekenzwakke groep met 5 of meer fouten. Voor deze groep geldt dat de procedurele kennis en vaardigheid van het vermenigvuldigen van

[30] Bijv. ter verduidelijking 35 : 7 x 4 = $\frac{35}{7}$ x 4 Geen van de leerlingen, zoals ook blijkt uit toets IV, zou nu 7x 4 eerst doen.

´willekeurige´ meercijferige natuurlijke en decimale breuken onvoldoende is. Deze leerlingen zijn benaderd voor het interventieprogramma.
34% van de leerlingen laat duidelijk leemtes in de procedurele kennis bij het vermenigvuldigen met decimale breuken zien. Tevens blijkt dat 30% van de leerlingen kiest voor splitsen, een weinig adequate rekenmethode voor complexere vermenigvuldigingen.
Ook blijkt uit de analyse dat de metacognitieve vaardigheden onvoldoende zijn. Door middel van schatten hadden leerlingen veel rekenfouten kunnen voorkomen en komma´s op de goede plaats kunnen zetten.
De resultaten komen overeen met de literatuur, besproken in de theorie. Vermenigvuldigen met complexe getallen staan wel genoemd in de referentiekaders voor 1S (wellicht niet expliciet genoeg), maar veel basisscholen vinden het een taak van het voortgezet onderwijs. In de methode Pluspunt wordt ook gestimuleerd om deze opgaven met een rekenmachine te maken.

<u>Aanbevelingen</u>
Geconcludeerd kan worden dat er op klassenniveau en in de interventie meer aandacht moeten komen voor:

- Procedurele kennis van de algoritmes met decimale breuken.
- Automatiseren van de procedures.
- Metacognitieve kennis en vaardigheden voor het vermenigvuldigen.
- Structureren van handige (hoofdreken) rekenstrategieën, waarbij duidelijk wordt bij welke getalsstructuren handige rekenstrategieën tijdbesparend zijn.

Delen (toetsonderdeel III)
Voor dit toetsonderdeel moeten de leerlingen iets meer tijd hebben gezien het grote aantal leerlingen (36%) dat dit onderdeel niet af heeft. Om deze reden doe ik geen uitspraak over de metacognitieve kennis en vaardigheden van de leerlingen. Het feit dat 15% van deze groep niet in staat is 5 opgaven te maken in 15 minuten duidt naar mijn mening en die van de docenten erop dat de procedurele vaardigheden onvoldoende zijn.
Het gemiddeld aantal goede uitkomsten is 3, wat erop neerkomt dat 63% van de leerlingen 57% van de opgaven goed heeft. De score van de gemiddelde leerling is naar de maatstaven van de wiskunde docenten te laag. Slechts 29% van de

leerlingen voldoet min of meer aan de 70% norm. De verwachting is dat als de leerlingen meer tijd krijgen het percentage zal stijgen.
15 leerlingen behoren tot de rekenzwakke groep leerlingen met 5 of meer foute antwoorden.
Bij nadere analyse blijkt dat 51% van de leerlingen problemen heeft met delingen met decimale breuken. 89% van de leerlingen gebruikt de staartdeling of de kolomsgewijze methode. 11% kent één van deze twee methode niet of onvoldoende. Dit betekent dus dat deze groep geen algemeen geldende procedure ter beschikking heeft om delingen snel op papier uit te rekenen en dus volledig afhankelijk van de rekenmachine is. Deze leerlingen zijn uitgenodigd voor het interventieprogramma.

Het doorrekenen tot decimale quotiënten staat niet expliciet genoemd in de kerndoelen en het 1S referentieniveau. Echter, de procedurele kennis hiervoor is toch bij 56% goed aanwezig.
Kortom de procedurele kennis en vaardigheid van meercijferige natuurlijke en decimale breuken is bij 70% van de leerlingen onvoldoende.
16 leerlingen behoren tot de `rekenzwakke´ leerlingen met 5 of meer fout. Deze groep is uitgenodigd voor het interventieprogramma.
Zoals in de theorie beschreven staat zijn de resultaten voor de bewerking delen gedaald en worden de algoritmes voor delen als een moeilijk ervaren. Dit geldt ook voor onze gymnasiumleerlingen, als delen vergelijke met vermenigvuldigen.

De laatste vraag, waarbij km/uur omgezet moeten worden in m/s geeft bij veel leerlingen problemen. Zoals eerder vermeld was te weinig tijd hierbij een probleem. Een harde conclusie kan dan ook niet gegeven worden. Opvallend is wel dat uit de analyse van de toetsen blijkt dat 35% van de leerlingen fouten heeft gemaakt bij de omzettingen in het metriek stelsel.

<u>Aanbevelingen</u>
Geconcludeerd kan worden dat er op klassenniveau en in de interventie meer aandacht moeten komen voor:

- De procedurele kennis voor delen met decimale breuken.
- Automatiseren van een efficiënte algoritme.

- Het metriek stelsel en met name samengestelde opgaven zoals de omzetting van km/uur naar m/s.
- Doorrekenen van rest naar (breuken) en decimale quotiënten.

Bewerkingen met breuken (toets IV)

Voor dit onderdeel van de toets hebben leerlingen te weinig tijd. Een paar minuten extra kan betere resultaten opleveren, maar ook het gebrek aan procedurele vaardigheid in vermenigvuldigen en delen met breuken om te gaan, kost leerlingen veel tijd. Om deze reden doe ik geen uitspraak over de metacognitieve vaardigheden van de leerlingen. De docenten wiskunde verwachten dat als de leerlingen meer tijd krijgen de resultaten zullen stijgen.`Het ontbreekt de leerlingen aan voldoende oefening´, zoals één van hen heeft opgemerkt.

a. *Optellen en aftrekken breuken*

86% van alle leerlingen had alle opgaven voor dit onderdeel gemaakt.
De procedurele kennis en vaardigheid van het optellen en aftrekken met breuken is slechts bij 57% van de leerlingen (0-1 fout) naar de norm van de docenten goed. Het gemiddeld aantal fouten ligt op 1 van de 4 opgaven.
Voor de 20 zwakke rekenaars geldt dat de procedurele kennis en vaardigheid zeer slecht is. Deze leerlingen zul ik in de toekomst vragen deel te nemen aan een interventieprogramma.
Veel rekenfouten worden veroorzaakt doordat:

- voor het gelijkmaken van de noemers niet de kleinste gemene deler gekozen wordt. Dit is ook erg tijdrovend
- leerlingen gehele getallen vergeten mee te nemen in hun optelling. Duidelijk een gebrek aan oefening.

b. *Vermenigvuldigen met breuken*

64% van de leerlingen voldoet niet aan de norm van de wiskunde docenten. Meestal wordt alleen de eerste, eenvoudige, opgave goed opgelost.
Voor bijna de helft van de leerlingen is de procedurele kennis van het vermenigvuldigen met breuken onvoldoende. De procedurele (deels declaratieve)

kennis van het vereenvoudigen van breuken, is zeker bij zeer veel leerlingen onvoldoende.
Twee opvallende zaken bij de keuze van de oplossingsstrategie zijn:

a) Dat veel leerlingen de noemers eerst gelijk maken alvorens het geheel te vermenigvuldigen. Dit kost veel tijd en zorgt voor veel rekenfouten.

b) Het wegstrepen van getallen boven en onder de streep om zo vermenigvuldigingen te vereenvoudigen is door 3 leerlingen toegepast. Dit betekent dat de procedurele kennis van het vereenvoudigen door bijna alle leerlingen niet in deze situatie herkend wordt. Het niet toepassen van deze kennis maakt deze twee opgaven tot zeer tijdrovende opgaven.

c. Delen met breuken

Volgens de kerndoelen hebben de leerlingen in groep 8 nog niet de formele delingsmethode met breuken gehad, maar wel de methode waarbij de uitkomst berekend wordt d.m.v. verhoudingen (informele rekenmethode) met een geheel getal en een breuk. 42% van de leerlingen kent de informele methode. Echter, dit leidde bij slechts een derde tot een goed antwoord. 10% van de leerlingen kent de formele rekenmethode. Slechts 50% van deze kleine groep beheerst hem goed.

Kortom, de formele als ook de informele kennis en vaardigheid van het delen met breuken is onvoldoende. Deze resultaten zijn in lijn met meldingen hierover in de literatuur. (Gravemeijer, 2009) (Buijs et al, 2008).

<u>Aanbevelingen</u>

Geconcludeerd kan worden dat er op klassenniveau en in de interventie meer aandacht moeten komen voor:

- alle formele bewerkingen met breuken. De formele bewerkingen zijn later nodig voor algebra. Een beperkte kennis leidt in hogere klassen tot vertraging en slechte resultaten met algebra. Voor delen kennen veel leerlingen niet meer de informele rekenstrategie met verhoudingen. De procedurele kennis voor optellen en aftrekken met samengestelde breuken is onvoldoende.
- vereenvoudigen van breuken.

- gelijkmaken van breuken met de kleinste gemene deler.

De resultaten zijn komen over een met de literatuur (Vos, 2008). De bewerkingen optellen en aftrekken worden beter gemaakt, omdat ze ook meer geoefend zijn in groep 8. Het formele vermenigvuldigen en delen met breuken worden vaak uitgesteld naar het voortgezet onderwijs. Daar veronderstellen docenten wiskunde dat ze alleen de formele regels moeten bijbrengen. (Dekker & Kindt, 2006, 2010)

d. Gemiddeld niveau van de leerlingen over de totale toets I-IV.

De docenten hebben aangegeven dat zij het wenselijk vinden dat leerlingen 70% van de onderdelen I,II,III en 60% van onderdeel IV goed beantwoorden. Uit de resultaten is op te maken dat nog niet de helft van de leerlingen de 65% norm haalt. Hierbij moet wel opgemerkt worden dat de leerlingen wellicht beter scoren als ze iets meer tijd krijgen. De toekomst zal het leren.

19 leerlingen behoren tot de groep zwakke rekenaars met 17 foute opgaven. Zij hadden 55% van de opgaven fout.

Over de gehele toets genomen kan dus geconcludeerd worden dat we op het gymnasium met onze leerlingen dezelfde problemen zien zoals in de literatuur gemeld worden (Dekker & Kindt, 2006). De formele rekenstrategieën zijn niet of niet expliciet genoeg besproken en onvoldoende geautomatiseerd. De mate van formaliseren van de bewerkingen met breuken verschilt sterk per leerling. Het lijkt erop dat de extra uitdaging in het basisonderwijs (die deze leerlingen aan kunnen) slechts bij een deel van de leerlingen benut is voor het verbeteren van de verticale rekenvaardigheden. Een gegeven waar met het opzetten van een nieuw rekenprogramma rekening mee moet gehouden worden.

Hoofdvraag 2. Resulteert een interventie met de traditionele rekenmethode tot verbetering van de rekenvaardigheden?

Op basis van de conclusies van de toets is een interventieprogramma opgesteld voor vermenigvuldigen en delen. De opkomst voor de bijeenkomsten is tegen gevallen, m.n. voor de module delen. Veel leerlingen hebben verplichtingen na schooltijd. Het verplicht stellen van de extra lessen zou dit probleem kunnen oplossen.

Alle getoetste leerlingen voldoen aan de norm van de docenten.
Door het beperkt aantal getoetste leerlingen geven de resultaten slechts een indicatie dat de traditionele rekenmethode een goede manier is om de rekenvaardigheden van gymnasium leerlingen te verbeteren. Hierbij moet wel in ogenschouw genomen worden dat weinig gezegd kan worden over de resultaten op de lange termijn. De nieuw aangeleerde procedures en metacognitieve vaardigheden moet onderhouden worden om op dit niveau te blijven. (Dekker & Kindt, 2006)

5.1 Aanbevelingen voor het beleid op school

Op basis van de resultaten van het onderzoek heeft de sectie wiskunde reeds besloten op klassenniveau dat:

1. tijdens de eerste maand van het schooljaar de wiskundeles van klas 1 geheel in het teken staat van rekenen waarbij de traditionele algoritmes (algemeen geldende strategieën) voor vermenigvuldigen en delen met natuurlijke getallen, decimale breuken en breuken met breuken worden behandeld. De toepassing van handige rekenstrategieën wordt gestructureerd zodat duidelijk is wanneer deze ook tot een efficiëntere oplossing van de opgaven leiden. Het onderwijs zal erop gericht zijn dat alle leerlingen de traditionele algoritmes niet alleen aanleren, maar ook gaan gebruiken en automatiseren.
2. er (door mij) een nieuw rekenprogramma wordt ontwikkeld, waarbij de module materialen van het interventieprogramma en de bovenstaande aanbevelingen de basis vormen.
3. in het begin van het jaar in klas 1 de door mij ontwikkelde toets afgenomen wordt. Docenten weten dan welke leerlingen zwakke rekenaars zijn en kunnen extra aandacht aan hen besteden.
4. na een maand de kennis en vaardigheden worden getest met een vergelijkbare toets.
5. de vaardigheden worden onderhouden door verplicht elke week 15 opgaven te maken via de rekensite Rekenbeter. (http://www.rekenbeter.nl/) Deze site is voor dit doel zeer geschikt omdat hij de mogelijkheid geeft voor docenten. de leerlingen te monitoren en de sommen aanpast aan het individuele niveau.
6. in de tweede helft van het jaar de docenten opnieuw een rekentoets zullen afnemen.

Op leerlingniveau is besloten door de schoolleiding en de sectie wiskunde dat:

1. leerlingen die na de tweede toets (een maand na de eerste toets) nog onvoldoende scoren, verplicht extra rekenlessen moeten volgen. Voorlopig zal ik die zelf gaan geven. De interventie zal sterk directief zijn en erop gericht zijn specifieke leemtes in procedurele kennis en vaardigheden weg te werken en de metacognitieve vaardigheden te verbeteren.

Op schoolniveau doe ik een aantal aanbevelingen:

1. Ook in de klassen 2 en 3 nemen we een vergelijkbare signaleringstoets af, omdat er ook in deze klassen nog ‘rekenzwakke’ leerlingen zijn.
2. In het bètaoverleg wordt een beleid ontwikkeld, waarbij het aanleren van algoritmes gesynchroniseerd wordt en het automatiseren van de verschillende standaardalgoritmes gestimuleerd wordt. Dit zal erop neer komen dat leerlingen minder gaan rekenen met de rekenmachine en meer met pen en papier.

Hoofdstuk 6 Evaluatie

6.1 Hoe heeft mijn onderzoek bijgedragen aan verbetering van het rekenonderwijs?

Door mijn onderzoek is de discrepantie tussen het feitelijke niveau van verticaal mathematiseren en het niveau, dat de docent wiskunde verwachten van de leerlingen, geconcretiseerd.. Een duidelijk voorbeeld is dat de meeste leerlingen moeite hebben met delen met decimale breuken. Het rekenonderwijs in klas 1 zal hierdoor resultaatgerichter worden.
Door de interventie is er tevens een aanwijzing gekomen dat een directieve didactiek en veel oefenen op de korte termijn een effectieve manier is om snel procedurele vaardigheden bij zwakke rekenaars te verbeteren.
Het onderzoek heeft een test opgeleverd waarmee in de toekomst ook tekortkomingen in de basisbewerkingen van individuele leerlingen in andere leerlagen geanalyseerd kunnen worden.

6.2 Hoe heeft dit onderzoek mij in mijn gedrag en ontwikkeling als rekenspecialist veranderd?

Met dit onderzoek heb ik mij gedegen willen voorbereiden op mijn taak als rekenspecialist en remedial teacher binnen mijn school. Een goede analyse van het gemiddelde niveau van de leerlingen, de declaratieve kennis en procedurele vaardigheden van de basisrekenvaardigheden is hiervoor van primair belang. Dit onderzoek heeft mij een goede basis gegeven. Dit is echter niet het enige wat het mij opgeleverd heeft. Daarnaast heeft het:

- mij een pragmatische aanpak geleerd om onderwijsproblemen binnen de school bespreekbaar te maken. Door een toets te ontwikkelen die de wensen van de docenten concretiseert, wordt duidelijk waar exact discrepanties zitten tussen verwachtingspatroon en realiteit. Op dit moment is een vergelijkbaar probleem met de sectie Oude Talen en de sectie Nederlands over het grammatica onderwijs. Waar de sectie Nederlands het idee heeft de leerlingen de grammatica goed geleerd te hebben, blijven de docenten Oude Talen steeds klagen. Oplossen van dit probleem is ook een van mijn taken.

- gezorgd voor intensivering van de contacten met de sectie wiskunde. De voorbesprekingen en de besprekingen van de resultaten van de toets en het interventieprogramma hebben opgeleverd dat mijn collega´s wiskunde respect hebben voor mijn specifieke kennis op het gebied van rekenen als niet-wiskundige. Aan de andere kant heeft het mij inzicht gegeven in de problemen in het wiskunde onderwijs als gevolg van slechte basisvaardigheden. Op dit vlak zal ik in de toekomst mij verder ontwikkelen door het bestuderen van de leerboeken wiskunde.
- mij een goed inzicht gegeven in de discussie rondom het rekenonderwijs. Door het literatuuronderzoek heb ik nu een goed inzicht in de verschillen in rekenonderwijs gebaseerd op de realistische onderwijstheorie en de traditionele onderwijstheorie. Hierdoor ben ik nu instaat de zwaktes van de realistische onderwijstheorie voor onze leerlingen te compenseren, wat de leerlingen ten goede komt.
- een goede signaleringstoets opgeleverd waarmee ik zowel de eerstelijns hulp als de tweedelijns hulp voor leerlingen efficiënt kan opzetten. Deze kennis zal zowel de rekenzwakke als de betere leerlingen ten goede komen.
- een basis gegeven voor het ontwikkelen van een efficiënt eerstelijns en tweedelijns rekenprogramma voor de eerste klas.

Het werken met de leerlingen tijdens het interventieprogramma heeft mij geleerd dat met name de rekenzwakke leerlingen zeer onzeker zijn over hun rekenvaardigheden. Leerlingen weten van zichzelf dat ze geen goede basisvaardigheden hebben en hebben in de loop van de jaren geleerd dit te compenseren zo goed en kwaad als dit kan. Juist door het inzetten van opgaven met complexere getalsstructuren en door deze te groeperen per bewerking, vielen deze leerlingen door de mand en werd duidelijk welke procedurele kennis en vaardigheid onvoldoende is. Ik heb dan ook een gevoel van opluchting bij de leerlingen opgemerkt. Veel leerlingen die meegedaan hebben aan het interventieprogramma zijn erg blij met de opgedane kennis (ook zij die niet meededen aan de toets), en hun resultaat van de eindtoets.

Daarnaast is mij tijdens het interventieprogramma opgevallen dat de declaratieve kennis van de tafels van een aantal leerlingen niet voldoende is. Leerlingen moeten vaak even nadenken voordat ze het goede antwoord hebben. Ze hebben dus wel een goede geautomatiseerde procedure geleerd, echter echt declaratief is de kennis niet. Dit betekent dat het werkgeheugen toch belast wordt, wat zijn weerslag kan

hebben op de resultaten bij het vak wiskunde. Met name in de tweede lijn zal ik hieraan ook aandacht besteden.
Mijn uitdaging in de toekomst wordt het rekenonderwijs zo te ontwikkelen dat het wiskunde onderwijs in de bovenbouw voor leerlingen eenvoudiger wordt en ondersteuning biedt voor de zwakke wiskundeleerlingen in de bovenbouw. Goede rekenvaardigheden verbeteren het begrip van algebra en verlagen de belasting van het werkgeheugen, wat ten goede kan komen aan de resultaten voor wiskunde en het rekenvaardigheidexamen.

6.3 Hoe is het onderzoek verlopen?

Dit onderzoek is naar mijn mening te omvangrijk geweest voor een Master Sen onderzoek. De literatuur maar ook de gesprekken met specialisten hebben mij het idee gegeven dat het met de basisvaardigheden van onze leerlingen over het algemeen goed gesteld was. Daarom heb ik besloten het onderzoek niet voor één basisbewerking maar meerdere op te zetten. Deze vooronderstelling heeft mij uiteindelijk geconfronteerd met een grote hoeveelheid werk. Het nut van de uitkomst voor mijn ontwikkeling als rekenspecialist heeft mij doen besluiten alle gegevens uit te werken en niet een keuze te maken.

Nawoord

Dit onderzoek geeft een antwoord op de vraag in de titel. “Kunnen leerlingen van nu dit uitrekenen?” Met andere woorden: Slagen leerlingen nog voor de toelatingstoets van 1960? Neen, een groot aantal leerlingen zou niet slagen. Daarbij geloof ik niet dat het potentieel van de leerlingen verlaagd is, daar de formele rekenmethoden in een paar lessen bij te brengen zijn. De voorwaarde, volgens de realistische theorie, goed rekenkundig inzicht is bij deze groep allang bereikt. Waarom zijn deze dan niet geleerd op de basisschool? Op het gymnasium moeten de leerlingen soms hard werken om het niveau bij te houden en moeten leerlingen in 6 jaar naar een universitair niveau klaargestoomd worden. Dit kost velen van hen al moeite genoeg. Naar mijn mening zou er meer gedifferentieerd lesgegeven moeten worden in groep 8, conform de adviezen van mevrouw Dekker (Dekker & Kindt, 2006). Leerlingen die naar het Vwo (en Havo) gaan, worden dan klaargestoomd zodat ze alle bewerkingen, vermenigvuldigen, delen met eenvoudige en complexe natuurlijke getallen, decimale breuken, breuken geautomatiseerd hebben. Vermenigvuldigen en delen wordt vanaf groep 4 behandeld. Echter leerlingen kunnen in groep 8 nog geen vermenigvuldigingen en delingen maken met willekeurige getallen. Bij het bestuderen van methode Pluspunt en Naar zelfstandig rekenen heb ik me erover verwonderd dat voor vermenigvuldigen en delen de leerlingen van nu niet verder komen dan opgaven uit de boekjes van Naar Zelfstandig Rekenen van groep 6. Als de Cito toets afgeschaft wordt, komt er weer een mogelijkheid dat scholen zelf een toelatingsexamen kunnen instellen. Wellicht komt er dan een mogelijkheid het verticale rekenen uit het verdomhoekje te halen.

Literatuurlijst

1. Bruin-Muurling,G. ,Gravemeijer, K. & Eijk, M. van. (2010) Aansluiting schoolboeken basisschool en Havo/Vwo. NAW 5/11 (1)
2. Bruinsma, B. (1969) *Nieuw Rekenen voor het basisonderwijs. Algemene Inleiding*. p11-12. Baarn: Bosch en Keuning.
3. Buijs, K. (2008) *Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen*. Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education.
4. Buijs, K., Klep, J. & Noteboom, A. (2008). *Tule - Rekenen/wiskunde.*. Enschede: SLO, Nationaal experisecentrum voor leerplanontwikkeling
5. Cadot, J. & Vroegindeweij, D. (1986). *10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde onderzocht. Op weg naar een nationaal plan voor het reken- en wiskundeonderwijs op de basisschool en het gebruik van de computer daarbinnen***.** Den Haag: OW&OC
6. Craats, J. van der & Bosch, R. (2007). *Basisboek rekenen*. Amsterdam: Pearson Education
7. Craats, J. van der (2007). Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. *Nieuw Archief voor Wiskunde* 8. p. 132-136.
8. Dekker, T. & Kindt, M. (2006) Wat doen we (niet) met breuken? *Nieuwe Wiskrant 26 (2)* p.6-10
9. Dekker, T. & Kindt, M. (2010) Productief oefenen met breuken? *Nieuwe Wiskrant 29 (3)* p.5-8
10. Expertgroep doorlopende leerlijnen (Commissie Meijerink) (2008). *Over de drempels met taal en rekenen; Hoofdrapport. Over de drempels met rekenen; Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen.* Binnengehaald 12 oktober 2012, van http://www.slo.nl/nieuws/dll/Rekenrapport.pdf/
11. Gelderblom, G. (2008) Effectief omgaan met zwakke rekenaars. Amersfoort: CPS onderwijsontwikkeling en advies.
12. Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*, p.111–129.
13. Gravemeijer, K.P.E. , Bruin-Muurling, G. & Eijck,M. van. Aansluitingsproblemen tussen primair en voortgezetonderwijs. *Reken-*

wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 28(4). Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education.

14. Harinck, F. (2010). *Basisprincipes praktijkonderzoek*. Antwerpen - Apeldoorn: Garant. p.73
15. Harskamp, E. (2007) *Reken-wiskunderesultaten van leerlingen aan het eind van de basisschool*. In Over de drempels met taal en rekenen, bijlage A. Enschede: Expertgroep Doorlopende leerlijn en taal en rekenen. Binnengehaald 12 oktober 2012, van http://www.slo.nl/nieuws/dll/Rekenrapport.pdf/
16. Heuvel-Panhuizen, M. van den (2009). Hoe rekent Nederland?. *Nieuwe Wiskrant*, 28(4), p. 8-15.
17. Hickendorf, M. & Janssen, J.(2009). De invloed van contexten in rekenopgaven op de prestaties van basisschoolleerlingen. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 28(4).* Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education. Binnengehaald 20 februari 2012, van https://openaccess.leidenuniv.nl/bitstream/handle/1887/16362/hickendorff_jansen_PP.pdf?sequence=2
18. Inspectie van onderwijs. (2008). *De staat van het onderwijs, Onderzoeksverslag 2006/2007*. Utrecht: inspectie van onderwijs.
19. Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4*. PPON-reeks 32. Cito: Arnhem.
20. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering.* Alkmaar: Bejo druk & print. Binnengehaald 10 april 2012, van http://nl.wikipedia.org/wiki/Realistisch_rekenen
21. *Moderne Wiskunde 1 Havo/Vwo Oefenboek Rekenen*. (2008). Groningen/Houten Noordhoff
22. Putten van, C.M. (2008). De onmiskenbare daling van het prestatiepeil sinds 1987. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 27(1).* Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education.

23. Putten, C.M. van & Hickendorff, M. (2006). *Strategieën van leerlingen bij het beantwoorden vaan deelopgaven in de periodieke peilingen aan het eind van de basisschool van 2004 en 1997*.
24. Reinders, J. M. & Snijders, J. (1959) *Functioneel rekenen. Handleiding.* p30-31. Amsterdam: Versluys
25. Ruijssenaars, A. J. J. M., Luit, J. E. H. van, & Lieshout, E. C. D. M. van (2004). *Rekenproblemen en Dyscalculie*. Rotterdam: Lemniscaat
26. Schoot, F. van der (2008). *Onderwijs op peil? Een samenvattend overzicht van 20 jaar PPON.* Arnhem: Cito
27. Treffers, A. & Heuvel- Panhuizen, M. (2010). De rekenmethode telt. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk* 29(1), p. 50-55.
28. Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction . The Wiskobas project*. Dordrecht: Kluwer
29. Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht* (diss). Utrecht: Instituut voor Ontwikkeling van Wiskunde Onderwijs (IOWO)
30. Uittenbogaard, W. (2008). Zonder cijferen kun je een heel eind komen. *Volgens Bartjens… 27(4), 10*.
31. Verhoef, N. (2006). Meer drama in het wiskundeonderwijs. *Nieuwe Wiskrant*, 26(2), p.11-16.
32. Vos, F. P. (2008) Rekenen door Nederlands tweedeklassers in internationaal perspectief (1982-2003): zijn de prestaties voor- of achteruitgegaan? In Over de drempels met taal en rekenen, bijlage A. Enschede: Expertgroep Doorlopende leerlijn en taal en rekenen. Binnengehaald 12 oktober 2012, van http://www.slo.nl/nieuws/dll/Rekenrapport.pdf/
33. Vos, T. de (1998). *Tempo Test Rekenen.* Amsterdam: Harcourt Assessment B.V.
34. Zandvoort, R. H., Venekamp, H. M. & Kuipers N. (1970) *Naar Zelfstandig Rekenen. Rekenmethode voor de lagere school.* Groningen: Wolters Noordhoff.)

Bijlage 1 Gesprekken met drie docenten uit de sectie Wiskunde.

Hoe wordt het rekenonderwijs in klas 1 onderwezen?
De docenten gebruiken sinds twee jaar het boekje Nieuwe Wiskunde Rekenen. Leerlingen werken in de klas zelfstandig het boekje door. Didactisch verschillen de docenten. Een docent bespreekt regelmatig bepaalde opgaven met leerlingen en legt een accent op de traditionele rekenalgoritmen. Een docent controleert regelmatig de voortgang van de leerlingen in de schriften. Hij controleert of de leerlingen de juiste uitkomsten hebben. Foute uitkomsten bespreekt hij met de individuele leerling. Een docent laat leerlingen zelfstandig de opgaven maken en helpt leerlingen waarnodig.

Wat zijn de resultaten bij toetsen?
Een docent heeft vorig jaar een toets afgenomen. De resultaten waren wisselend. Dit heeft haar ertoe gebracht de procedures voor de verschillen rekenvaardigheden opnieuw uit te leggen en meer sturend rekenonderwijs te geven.
De andere docenten hebben geen toets afgenomen, maar hebben niet het idee dat alle leerlingen alle rekenvaardigheden goed beheersen.

Bevalt de methode Nieuwe Wiskunde Rekenen?
De docenten geven aan dat de methode gekozen is opdat leerlingen de rekenvaardigheden kunnen ophalen, automatiseren en onderhouden. Zij zeggen nu dat zij de methode te eenvoudig vinden. Een docent geeft aan dat het niveau niet boven groep 6 uit komt. De gekozen opgaven zijn te getalsspecifiek.

Vermenigvuldigen
Welk niveau verwacht je van de leerlingen als ze van de basisschool komen op het gebied van vermenigvuldigen?
De drie docenten zeggen dat zij van leerlingen verwachten dat ze adequaat willekeurige vermenigvuldigingen kunnen uitvoeren zonder rekenmachine. Niet alleen de procedurele kennis is hierbij van belang ook de goede uitkomst (vaardigheid).
Ze zien graag dat leerlingen het traditionele cijferen voor vermenigvuldigen beheersen omdat dat minder tijd kost dan andere methoden.

Voldoen leerlingen hieraan?
Sommige wel, maarr er is een grote groep die moeite heeft om tot het juiste antwoord te komen. Zelfs in de bovenbouw zijn er leerlingen die niet goed kunnen vermenigvuldigen. Ze zijn niet in staat de uitkomst van de rekenmachine te controleren. Het goed schatten en andere controle strategieën zijn onvoldoende ontwikkeld.

Wat is de oorzaak hiervan?
Leerlingen hebben onvoldoende geoefend en ontbreekt dus de procedurele vaardigheid of ze hebben de snelle algoritmes zich niet aangeleerd.

Behandelen jullie het onder elkaar rekenen in de klas?
Twee docenten behandelen cijferend rekenen in de klas, maar merken op dat leerlingen toch veelal terugvallen op de oude basisschool methode. Er zijn hierover geen afspraken gemaakt binnen de sectie.

Delen.
Welk niveau verwacht je van de leerlingen als ze van de basisschool komen op het gebied van delen?
De docenten verwachten alle drie van leerlingen dat ze adequaat delingen met willekeurig gekozen getalsstructuren kunnen uitvoeren zonder rekenmachine. Niet alleen de procedurele kennis is hierbij van belang ook de goede uitkomst (vaardigheid). De voorkeur gaat uit naar het traditionele algoritme, de staartdeling. Zij merken op dat de meeste leerlingen deze niet gehad hebben op de basisschool.

Voldoen leerlingen aan het gewenste niveau?
De meesten niet. De rekenmethode van de leerlingen is meestal kolomsgewijs, maar veelal rekenen leerlingen de opgaven uit door middel van hoofdrekenen. Vooral het laatste leidt vaak tot foutieve antwoorden. Het is dan ook lastig om de gekozen strategie te achterhalen omdat er geen uitwerking bij staat. Leerlingen die de kolomsgewijze delingsmethode gebruiken doen dit vaak goed, echter dit wisselt sterk per leerlingen en opgave. Veel leerlingen kunnen geen opgave uitrekenen met een uitkomst in decimalen.

Behandelen jullie de staartdeling in de klas?
Twee docenten leggen het verband tussen kolomsgewijs rekenen en staartdeling uit, maar ook in dit geval nemen niet alle leerlingen de methode over.

Breuken
Welke rekenvaardigheden met breuken verwachten jullie van de leerlingen van klas 1? De docenten verwachten van de leerlingen op gymnasiumniveau dat ze adequaat en de snelle rekenmethode kennen voor optellen en aftrekken van breuken. Daarnaast moeten ze ook snel vereenvoudigingen herkennen. Wat betreft het vermenigvuldigen met breuken horen ze de procedurele kennis te hebben. Delen met breuken is moeilijk. Leerlingen hebben nog niet de formele methode, delen van breuken is gelijk aan vermenigvuldigen met het omgekeerde, gehad op de basisschool. Op zich zouden ze wel door middel van verhoudingen eenvoudige delingen met breuken moeten kunnen oplossen.

Voldoen leerlingen aan het gewenste niveau?
De meeste leerlingen kunnen wel optellen en aftrekken met breuken, maar gebruiken soms merkwaardige en ingewikkelde methoden daarvoor. Meestal wordt niet de kleinste gemene deler genomen. Vermenigvuldigen met breuken kunnen ze vaak niet. Delen met breuken kunnen de meesten niet. Dit wordt eigenaardig genoeg bijna niet onderwezen op de basisschool. De leerlingen zijn slim genoeg om iets extra´s te in de basisschoolperiode te leren.
Eén docent geeft aan dat hij regelmatig in de problemen komt zodra leerlingen met algebra te maken krijgen. Ze hebben te weinig inzicht in de bewerkingen, zodat ze met algebraïsche bewerkingen in de problemen komen. Het eenvoudig voorbeeld wordt gegeven van (a + 1)/ (a+ 3)= (a + 8)/ (a + 6). Leerlingen hebben er moeite mee om te zien dat de getallen onder de lijn naar de andere kant van het `= teken´ verhuizen.

Wat is de oorzaak hiervan?
Leerlingen oefenen te weinig en met te eenvoudige getallen. Daarnaast krijgen de betere leerlingen blijkbaar geen extra uitdagende stof om ervoor te zorgen dat ze een beter inzicht krijgen in het rekenen met breuken.

Behandelen jullie de verschillende bewerkingen met breuken klassikaal in de klas?
Vermenigvuldigen en delen met breuken wel, maar de opgaven met optellen en aftrekken zijn vaak te eenvoudig, waardoor ze deze hoe dan ook wel kunnen maken. Op dit moment is alleen het vermenigvuldigen bij twee van de drie docenten klassikaal besproken.

Ondervinden jullie er hinder van in latere jaren dat niet alle leerlingen de basisvaardigheden goed beheersen?
De beperkte rekenvaardigheid heeft invloed op het schatten. Een leerling zou snel m.b.v. schatten kunnen zien dat het antwoord fout is, maar dat gebeurt onvoldoende. Uitkomsten worden niet of onvoldoende met snelle rekencontroles op het laatste cijfer of op grootheid gecontroleerd.
Algebra wordt voor een aantal van hen moeilijk te begrijpen en het kost dus veel extra tijd.
Het probleem is ook dat het wiskundeprogramma erg vol is en een extra uur voor rekenvaardigheden, zoals gebeurt op veel scholen kan niet. Er is domweg bijna geen tijd voor extra rekenles. Docenten vinden dat de basisschool ervoor zou moeten zorgen dat de VWO leerlingen extra uitdagend werk krijgen, opdat zij hun basisvaardigheden beter ontwikkelen.

Bijlage 2 Relevante onderdelen van TULE voor de toets.

Tussen haakjes staan de onderdelen van de toets, waar deze vaardigheid in Tule vermeld staat .

Kerndoel 26; De leerlingen leren structuur en samenhang van aantallen, gehele getallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.

Groep 5,6 (toetsonderdeel 1,2,I,II,III)

- betekenis van de bewerkingen vermenigvuldigen en delen in verschillende eenvoudige contexten
- verkenning van de eigenschappen van vermenigvuldigen en delen
- veelvouden en deelbaarheid als basis voor:

    - kerndoel 27: het vlot kennen van de basisbewerkingen
    - kerndoel 28: het schattend rekenen
    - kerndoel 29: het handig rekenen
    - kerndoel 30: het schriftelijk rekenen

Groep 7,8 (toetsonderdeel 1,2,II,III)

- uitbreiding van betekenis van de basisbewerkingen (vermenigvuldigen, delen) in:
    - allerlei praktische contexten
    - het rekenen met kommagetallen
    - het meten en rekenen met maten
    - meetkunde, zoals het vergroten / verkleinen van figuren
- fundamentele uitbreiding van betekenis van de basisbewerkingen in het rekenen met verhoudingen, procenten en breuken (toetsonderdeel IV)
- samengestelde bewerkingen
- rekenregels, zoals bij het werken met haakjes en de volgorde van bewerkingen (toetsonderdeel I)
- inzichtelijk rekenen met breuken: (toetsonderdeel IV)
    - toepassen van de breuk als operator in betekenisvolle situaties: zoals bij 3/4 van de kinderen van de klas
    - optellen en aftrekken van (gelijknamige en ongelijknamige) eenvoudige breuken (benoemd en onbenoemd=rekengetal)
    - vermenigvuldigen van breuken met hele getallen (3/4 van 20, 3/4 x 20) en in betekenisvolle contexten met eenvoudige breuken
    - veelvoud van een breuk berekenen (20 x 3/4)
    - delen door (benoemde) breuken met behulp van verhoudingstabel (hoeveel glazen van 1/8 liter uit een fles van 1 liter?), voornamelijk in context
- rekenen met percentages als breuk en als kommagetal, eventueel met gebruik van o.a. verhoudingstabellen en de 1% regel
- rekenen met verhoudingen met behulp van verhoudingstabellen en met de dubbele getallenlijn (toetsonderdeel IV)

Kerndoel 27; Basisbewerkingen vermenigvuldigen en delen

Groep 4,5

- memoriseren van de tafel tot 10 (toetsonderdeel 1 en 2)

Groep 5,6

- bewustmaking van het 'inverse' karakter (omgekeerde handelingen) van vermenigvuldigen en delen, en gebruik makend van de kennis van vermenigvuldigstrategieën. (toetsonderdeel 1,2)
- het steeds vlotter en 'automatischer' leren berekenen van eenvoudige delingen, met en zonder rest (toetsonderdeel 1,2)
- het ontwikkelen van het analogierekenen:

  20 x 50 = 1000, denkend aan 2 x 5 = 10

  5600 : 80 = 70, denkend aan 56 : 8 = 7

- onderhouden en toepassen van
  - de parate kennis van de vermenigvuldigtafels
  - de kennis van delingen die omkeringen van tafelproducten zijn
  - het vlot en handig vermenigvuldigen en delen (met en zonder rest) met grotere getallen tot 100 (toetsonderdeel 1,2, II, III)

Kerndoel 28: De leerlingen leren schattend tellen en rekenen. (toetsonderdeel II,III)

Groep 5,6

- beoordelen op basis van schatten hoe nauwkeurig gerekend moet worden op basis van de grootte van de getallen en de aard van de context
- herkennen welke schatstrategie het best passend is en deze kunnen toepassen
- beredeneren hoe ver de geschatte uitkomst af zal wijken van de werkelijke uitkomst

Groep 7,8 kunnen afronden; eerst met hele getallen later ook met kommagetallen

- kritisch analyseren van en betekenis geven aan berekeningen met geschatte of afgeronde getallen; zijn de juiste keuzes gemaakt en correcte conclusies getrokken?
- schatten bij bewerkingen met kommagetallen, waarbij de positie van de komma en het effect van de cijfers achter de komma worden herkend. Dit geldt voor zowel benoemde als onbenoemde kommagetallen

- schatten van de uitkomsten van cijfersommen bij hele en vooral bij kommagetallen

Kerndoel 29 De leerlingen leren handig optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. (toetsonderdeel 1,2, II,III)

Groep 5,6

- handig vermenigvuldigen met strategieën zoals:
  - verdelen (5 x 28 → 5 x 20 + 5 x 8)
  - compenseren (4 x 148 → 4 x 150 - 4 x 2)
  - verwisselen (25 x 8 → 8 x 25)
  - verdubbelen=halveren (50 x 28 is evenveel als 100 x 14)
- handig delen met strategieën zoals:
  - verdelen (252 : 6 → 240 : 6 + 12 : 6)
  - compenseren (995 : 5 via 1000 : 5 - 5 : 5)
  - analogie (810 : 9 of 8100 : 9 naar analogie van 81 : 9)
  - omvormen (600 : 50 is evenveel als 1200 : 100)
- Deze strategieën komen zowel met kale getallen als in contextproblemen aan de orde

Groep 7,8

- toepassen van de strategieën op grotere getallen en kommagetallen; zowel met kale getallen als in contextsituaties

Kerndoel 30 De leerlingen leren schriftelijk optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen volgens meer of minder verkorte standaardprocedures. (toetsonderdeel II,III)

Vermenigvuldigen groep 5,6

- verkenning van de kolomsgewijze procedure voor het vermenigvuldigen van een eencijferig met een meercijferig getal
  (bijv.: 6 x 48, 7 x 234, e.d.)

```
  234
    7x
1400   (7x200)
 210   (7x30)
  28+  (7x4)
1638
```

- uitbreiding naar het kolomsgewijs vermenigvuldigen van een meercijferig getal met een meercijferig getal
  (zoals 24 x 35, 16 x 325, e.d.)
- introductie van de cijferprocedure voor het vermenigvuldigen van een meercijferig met een meercijferig getal

Vermenigvuldigen groep 7,8

- introductie van de cijferprocedure voor het vermenigvuldigen van een eencijferig met een meercijferig getal vanuit een verkorte werkwijze van het kolomsgewijs vermenigvuldigen
- verder inoefenen van de kolomsgewijze procedure dan wel van de cijferprocedure voor vermenigvuldigen

Delen groep 5,6

- verkenning van de procedure van het herhaald aftrekken
  (bijv.: 256:4, 624:24)

```
624: 24 =
240-  10x
384
240-  10x
144
120-   5x
 24
 24-   1x
  0   26
```

- inoefenen van de procedure van het herhaald aftrekken waarbij een werkwijze wordt nagestreefd met zo groot mogelijke 'happen': veelvouden van 100 en van 10, en een hap kleiner dan 10. De formele cijferprocedures voor delen worden in het basisonderwijs niet (meer) aangeboden

Kerndoel 33 De leerlingen leren meten en leren te rekenen met eenheden en maten, zoals bij tijd, geld, lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud, gewicht, snelheid en temperatuur.

Groep 7,8 (toetsonderdeel III laatste vraag)

- verkenning van en rekenen met tijd in relatie tot andere grootheden, met name bij snelheid (km/u)

Bijlage 3 Gevolgde procedure voor de ontwikkeling van de rekentoets en het interventieprogramma.

Het tijdpad voor dit onderzoek was als volgt:

- Oktober- november. In deze periode heb ik verschillende gesprekken gevoerd met de docenten wiskunde binnen de school om inzicht te krijgen in de problematiek en gewenste rekenvaardigheden
  Verder ben ik nagaan of er een goede test in de literatuur te vinden is of op de markt is. Hiertoe heb ik de Cito VAS toets bestudeerd. Deze test voldoet niet omdat de test vooral op horizontale rekenvaardigheden gericht is, zoals inzicht, en weinig opgaven met complexere getalsstructuren bevat waarbij de verticale rekenvaardigheden getoetst worden. De Tempo Toets Rekenen en de ABC toets zijn niet geschikt. Beide toetsen heb ik in een voorgaand onderzoek voor de module rekenen gebruikt. De ABC- toets blijkt te eenvoudig en leerlingen maken zo weinig fouten dat de validiteit op dit niveau ter discussie staat. De Tempo Toets Rekenen heb ik afgewezen omdat hij te beperkt is en te weinig differentieert.
  Daarnaast heb ik gesproken met mevrouw L. Boels[31]. Zij geeft aan dat er op dit moment (anno najaar 2011) geen goede rekentoetsen beschikbaar zijn specifiek gericht op gymnasiumleerlingen en onze wensen.
- November – december. Ik heb literatuur verzameld over problemen bij rekenvaardigheden bij Vwo leerlingen. Tevens heb ik oude en nieuwe reken methodes bestudeerd om een beeld te krijgen van de verschillen tussen het rekenonderwijs van vroeger (traditionele rekenonderwijs) en nu (realistische rekenonderwijs).
- Januari - februari. Noodgedwongen heb ik zelf een rekentoets voor klas 1 ontwikkeld. De toets is ter beoordeling voorgelegd aan de wiskunde docenten.
- Maart- april. Plannen, uitvoeren en nakijken van de toets en leerlingen selecteren. Ouders zijn schriftelijk op de hoogte gesteld van interventieprogramma (zie bijlage 2).
- April –mei. In deze periode heb ik een interventieprogramma geschreven voor vermenigvuldigen en delen. vervolgens is het interventieprogramma aangeboden aan geselecteerde leerlingen. Het niveau van de gemiddelde

[31] Mevr. L Boels te Delft is rekenspecialist en betrokken bij certificering van de rekenvaardigheidstoeten.

leerling is besproken met de wiskunde sectie als voorbereiding voor het onderwijsprogramma 2012-2013.

Bijlage 4 Rekentoets

Rekentoets

Laat de toets gesloten voor je liggen.

De Rekentoets bestaat uit 3 Toetsen.

Voor Toets 1 en 2 heb je elk 2 minuten. Voor Toets 3 heb je de rest van het uur. Dit deel bestaat uit 4 onderdelen. Om ervoor te zorgen dat je van elk onderdeel een aantal opgaven maakt, staat er een tijd bij. De docent geeft aan wanneer de tijd verstreken is.

Klas NAAM

Toets 1 Hoofdrekenen : je krijgt 2 minuten om dit deel van de toets te maken. Begin pas als de docent het zegt.

1) 0 x 5 =	18) 12 x 8 =
2) 5 x 8 =	19) 22 x 6 =
3) 6 x 7 =	20) 34 x 7 =
4) 4 x 8 =	21) 62 x 3 =
5) 3 x 9 =	22) 35 x 4 =
6) 6 x 9 =	23) 11 x 11=
7) 8 x 7 =	24) 12 x 12 =
8) 8 x 4 =	25) 15 x 15 =
9) 9 x 9 =	26) 25 x 25 =
10) 3 x 7 =	27) 43 x 6 =
11) 12 x 6 =	28) 52 x 7 =
12) 13 x 3 =	29) 61 x 9 =
13) 17 x 4 =	30) 25 x 14 =
14) 15 x 5 =	
15) 6 x 14 =	
16) 16 x 9 =	
17) 18 x 4 =	

Klas NAAM

Toets 2 Hoofdrekenen: je krijgt 2 minuten om dit deel van de toets te maken. Begin pas als de docent het zegt.

1) 0 : 5 =	20) 12,1 : 11 =
2) 63 : 9 =	21) 10,8 : 9 =
3) 56 : 8 =	22) 165 : 15 =
4) 48 : 6 =	23) 175 : 25 =
5) 56 : 7 =	24) 294 : 14 =
6) 32 : 8 =	25) 175 : 35 =
7) 35 : 5 =	
8) 49 : 7 =	
9) 54 : 6 =	
10) 24 : 4 =	
11) 69 : 3 =	
12) 124 : 4 =	
13) 84 : 6 =	
14) 96 : 8 =	
15) 56 : 4 =	
16) 91 : 7 =	
17) 8888 : 88 =	
18) 108 : 9 =	
19) 14,4 : 12 =	

Klas **NAAM**

Toets 3 Er zijn 4 onderdelen. Maak van elk onderdeel zoveel mogelijk opdrachten. Er staat een tijd bij elk onderdeel. Ben je eerder klaar, ga dan zelf verder. Tijd te kort? Geeft niet, maak ze evt. later.

I. Maak de opgaven; geef de stappen. Na 5 minuten ga je verder naar onderdeel **II**

a) 26 + 8 x 6 =	e) (7 -4) x 8 + 7 =
b) 46 – 7 x 3 =	f) 72 : (15 – 3 x 2) x 3 =
c) 90 : 3 x 5 =	g) 15 – 5 + 2 x 5 =
d) 28 : 4 + 36 : 6 =	

II. Maak de opgaven. **Bepaal zelf hoe je de som zo goed mogelijk oplossen kan.** Geef de bewerkingen!!!!! Geen rekenmachine Na 10 min. ga je naar onderdeel **III**

a) 23 x 24 =	**of**	23 24 x
Controleer je antwoord, klopt het? Zo nee, waar tussen ligt het antwoord dan?		
b) 36 X 29 =		
Controleer je antwoord, klopt het? Zo nee, waar tussen ligt het dan?		
c) 182 x 35 =		
Controleer je antwoord, klopt het? Zo nee, waar tussen ligt het dan?		

Klas **NAAM**

d) 7,2 x 1,3 =   Controleer je antwoord, klopt het? Zo nee, waar tussen ligt het dan?
e) 1,25 x 2,4 =   Denk je dat je antwoord klopt? Zo nee, waar tussen ligt het dan?
f) 215 X 51 =   Denk je dat je antwoord klopt? Zo nee, waar tussen ligt het dan?
g) 343 x 1,9 =   Denk je dat je antwoord klopt? Zo nee, waar tussen ligt het dan?
h) 14,9 x 0,75 =   Denk je dat je antwoord klopt? Zo nee, waar tussen ligt het dan?

Klas **NAAM**

III. Hoe vaak past het? . Als het niet op nul uitkomt, rond af op 1 decimaal (=1 cijfer achter de komma). Gebruik de **staartdeling of de hapmethode.** Na 15 min. naar onderdeel **IV.**

a) 5555: 25 = Als je dat kan, zet de rest om in een breuk. Kun je de rest ook in een komma getal schrijven?(1 decimaal achter de komma)	b) 352:16= Klopt je antwoord? Zo nee, waar tussen ligt het dan?
c) 301,6 : 3,2 = Controleer je antwoord. Klopt het? Zo nee, waar tussen ligt het dan?	d) 430:42 = Zet de rest om in een breuk Kun je de rest ook in een komma getal schrijven?(1 decimaal achter de komma)
e) 81262 : 5 = Als je dat kan, zet de rest om in een breuk. Kun je de rest ook in een komma getal schrijven?(1 decimaal achter de komma)	f) 62,22 : 17= Reken uit tot 2 cijfers achter de komma.

Klas **NAAM**

g) 24 km/ uur = m/ seconde (tip: hoeveel meter is 1 km. Hoeveel seconde zitten er in 1 min. en in 1 uur)

IV. Los op en **vereenvoudig de breuk.** Geef de bewerking!!.

$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=$
$\frac{16}{5}-2\frac{2}{15}+\frac{2}{3}=$
$\frac{2}{6}+\frac{4}{16}+\frac{5}{12}=$
$\frac{11}{18}-\frac{3}{12}=$
$\frac{2}{9}\times\frac{3}{6}=$
$\frac{4}{7}\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{12}=$
$\frac{3}{8}:\frac{3}{12}=$
$1\frac{2}{18}\times\frac{4}{6}\times\frac{6}{8}=$
$\frac{4}{5}:\frac{5}{12}=$

Tijd over? Heb je van toets 3 nog niet alle opgaven gemaakt. Maak die nu af !

Bijlage 5 Verantwoording afzonderlijke opgaven van de rekentoets

Toetsen 1 en 2.

De opgaven zijn bewerkingen met vermenigvuldigingen (toets 1) en delingen (toets 2) en lopen op in moeilijkheidsgraad. De belangrijkste en eenvoudigste opgaven staan vooraan. Hoe sneller een leerling elk deel weet te doorlopen hoe beter de declaratieve en procedurele kennis aanwezig is. Leerlingen krijgen 2 minuten om zover mogelijk in de test te komen.

Toets 1 Hoofdrekenen : je krijgt 2 minuten om dit deel van de toets te maken. Begin pas als de docent het zegt.

1) 0 x 5 =	18) 12 x 8 =
2) 5 x 8 =	19) 22 x 6 =
3) 6 x 7 =	20) 34 x 7 =
4) 4 x 8 =	21) 62 x 3 =
5) 3 x 9 =	22) 35 x 4 =
6) 6 x 9 =	23) 11 x 11=
7) 8 x 7 =	24) 12 x 12 =
8) 8 x 4 =	25) 15 x 15 =
9) 9 x 9 =	26) 25 x 25 =
10) 3 x 7 =	27) 43 x 6 =
11) 12 x 6 =	28) 52 x 7 =
12) 13 x 3 =	29) 61 x 9 =

13) 17 x 4 = 14) 15 x 5 = 15) 6 x 14 = 16) 16 x 9 = 17) 18 x 4 =	30) 25 x 14 =

Toets 2 Hoofdrekenen: je krijgt 2 minuten om dit deel van de toets te maken. Begin pas als de docent het zegt.

1) 0 : 5 = 2) 63 : 9 = 3) 56 : 8 = 4) 48 : 6 = 5) 56 : 7 = 6) 32 : 8 = 7) 35 : 5 = 8) 49 : 7 = 9) 54 : 6 = 10) 24 : 4 = 11) 69 : 3 = 12) 124 : 4 =	20) 12,1 : 11 = 21) 10,8 : 9 = 22) 165 : 15 = 23) 175 : 25 = 24) 294 : 14 = 25) 175 : 35 =

13) 84 : 6 = 14) 96 : 8 = 15) 56 : 4 = 16) 91 : 7 = 17) 8888 : 88 = 18) 108 : 9 = 19) 14,4 : 12 =	

Verantwoording toets 1

In toets 1 moeten de leerlingen zoveel mogelijk opgaven maken in twee minuten. Getest is:

- de declaratieve kennis van het tafels: 0 tot en met 9 (opgaven 1-10) en tot en met 20 (opgaven 11,12,18).
- de declaratieve kennis van het tafels: Omgaan met veel voorkomende tafels als 15 x 15, tafel van 25, 12x 12, 11x11. (opgaven 23-26,30)
- de procedurele hoofdrekenvaardigheden van vermenigvuldigingen van ééncijferige getallen met grotere tweecijferige getallen. (opgaven 13-17,19-22, 27-29)

Verantwoording toets 2

In tempotoets 2 moeten de leerlingen ook zoveel mogelijk opgaven maken in twee minuten. Getest is:

- de declaratieve kennis van de tafels 0 tot en met 9: (opgaven 1 t/m 10)
- de procedurele kennis en vaardigheid om snel en goed delingen van ééncijferige getallen als deler met getallen tussen de 50-150 als deeltal, waarbij het quotiënt tussen de 10-30 ligt .(opgaven 10-16)
- de procedurele kennis om om snel en adequaat oplossingsstrategieën te gebruiken. Het gaat hierbij om een mix van opgaven: delingen met driecijferige

getallen (met en zonder komma)als deeltal en vooral veelvoorkomende een of tweecijferige (9, 11, 12, 15, 25) getallen als deler (opgaven 17 t/m 25).

- de declaratieve kennis van verbanden en procedurele vaardigheid: leerlingen de opgaven 8888 : 88 (repeterend getal) snel uit kunnen rekenen en of leerlingen verband zien tussen twee delingen die een veelvoud van 10 met elkaar verschillen. (108:9 en 10,8:9)

Beoordeling toets 1 en 2

Voor de beoordeling worden de niet gemaakte en fout opgeloste opgaven bij elkaar opgeteld. Aangezien het hier om een homogene groep gymnasium leerlingen gaat, lijkt het mij niet zinvol een onderscheid te maken tussen fouten en niet gemaakte opgaven. Iedere gymnasium leerling moet instaat zijn deze opgaven foutloos of bijna foutloos te maken. Het onderscheid ligt vooral in de snelheid.

Verantwoording toets I t/m IV.

De toets bestaat uit 4 onderdelen (I t/m IV). Gevraagd wordt de uitwerkingen erbij te zetten, opdat later nagegaan kan worden of de leerlingen adequate oplossingstrategieën hebben gebruikt en waar zij fouten hebben gemaakt. Bij elk onderdeel wordt een aantal minuten genoemd. Dit is niet het maximaal aantal minuten, maar slechts een hulp om ervoor te zorgen dat alle leerlingen alle onderdelen van de toets doorlopen. Na het genoemde aantal minuten geeft de docent (of ik) aan dat leerlingen naar het volgende onderdeel dienen te gaan. Opgaven die niet gemaakt zijn mogen de leerlingen als ze tijd over hebben aan het eind alsnog maken. Leerlingen die eerder klaar zijn met een onderdeel gaan verder met het volgende onderdeel. Uit de voorafgaande pretest bleek dat goede rekenaars (2 leerlingen) de opgaven in ± 30-35 minuten kunnen maken. Dit betekent dat er een tijdsdruk op de toets staat. Leerlingen die voor één van de onderdelen meer tijd nodig hebben, zouden hieraan genoeg moeten hebben.

<u>Toetsonderdeel I Volgorde van bewerkingen.</u>

Onderdeel 1 Volgorde van bewerkingen. Adviestijd is 5 minuten. In de tabel staat het antwoord en welke bewerking getest is.

26 + 8 x 6 = 74	1.Declaratieve kennis van de volgorde x,+	(7 -4) x 8 + 7 =31	5.Declaratieve kennis van de volgorde (),x,+,

46 – 7 x 3 =25	2.Declaratieve kennis van de volgorde x,-	72 : (15 – 3 x 2) x 3 =24	6.Declaratieve kennis van de volgorde () x,- ,:,x
90 : 3 x 5 =150	3.Declaratieve kennis van de volgorde :,x	15 – 5 + 2 x 5 = 20	7.Declaratieve kennis van de volgorde x, -,+
28 : 4 + 36 : 6 =13	4.Declaratieve kennis van de volgorde :,+		

Toetsonderdeel II Vermenigvuldigingen

Onderdeel II bestaat uit 8 opgaven. Leerlingen mogen zelf beslissen welke oplossingsstrategie ze kiezen. Procedurele kennis en vaardigheid staan centraal. Adviestijd is 15 minuten. Nadien heb ik geïnventariseerd welke oplossingsstrategieën gekozen zijn voor dit onderdeel. Hierbij heb ik een onderscheid gemaakt tussen traditionele cijferend rekenen (c), kolomsgewijs rekenen (k), splitsend rekenen (s) en handig rekenen (h). Daarnaast wordt bekeken hoeveel fouten en wat voor fouten de leerlingen gemaakt hebben. Rekenfouten (r), methode fouten (m), komma fouten (k). In onderliggend schema staat vermeld welke oplossingsstrategieën adequaat zijn en wat de antwoorden zijn. Door de vraag onderaan elke opgave wordt de leerling gestimuleerd de vraag te controleren. Op grond van de resultaten van deze toevoeging in de eerste versie (hier stond de tekst ´klopt je antwoord`) heb ik besloten voor de laatste twee klassen de vraag te veranderen in `controleer je antwoord´. Hiertoe ben ik overgegaan omdat veel leerlingen zonder meer ‘ja’ opschreven zonder het antwoord te controleren.

23 x 24 =552 1) Procedure kennis en vaardigheid: Cijferend rekenen (traditionele logaritme) 2) Procedure kennis en vaardigheid: Kolomsgewijs rekenen 3) (geen voorkeur splitsen)
36 X 29 =1044 1) Declaratieve kennis handig rekenen (30 -1) 36 of 2) Cijferend rekenen 3) Kolomsgewijs rekenen
182 x 35 =6370 1) Declaratieve kennis handig rekenen halveren/verdubbelen (91 x 70) of 2) Cijferend rekenen

3) Kolomsgewijs rekenen
7,2 x 1,3 =9,36 1) Cijferend rekenen, let op de komma plaatsing 2) Kolomsgewijs rekenen, let op de komma plaatsing 3) (Splitsend rekenen)
1,25 x 2,4 =3 1) Procedurele vaardigheid handig rekenen halveren/verdubbelen (2,5 x 1,2) of (2,4 + 2,4/4) of (5 x 0.6) 2) Cijferend rekenen, let op de komma plaatsing 3) Kolomsgewijs rekenen, let op de komma plaatsing
215 X 51= 10965 1) Procedurele vaardigheid handig rekenen (50 +1) 215 of 2) Cijferend rekenen 3) Kolomsgewijs rekenen
343 x 1,9= 651,7 1) Declaratieve kennis handig rekenen (2-0,1) 343 of 2) Cijferend rekenen 3) Kolomsgewijs rekenen
14,9 x 0,75 =11,175 1) Cijferend rekenen, let op de komma plaatsing 2) Kolomsgewijs rekenen, let op de komma plaatsing 3) (geen voorkeur handig rekenen (15 -0,1) 0,75)

Toetsonderdeel III Delingen

Onderdeel III bestaat uit 7 vragen. De procedurele kennis en vaardigheid van het delen met natuurlijke getallen en komma getallen staat centraal. De leerling wordt gestimuleerd de hapmethode (kolomsgewijs) of een staartdeling te gebruiken. In de mondelinge toelichting in de klas wordt gemeld dat ook een andere methode mag en dat de benaming hapmethode gelijk is aan het kolomsgewijs delen. Leerlingen zijn gestimuleerd het antwoord in decimalen te geven maar ` rest´ mag ook. In een tweede versie is dit ook onderaan elke vraag apart vermeld. Fouten in afrondingen of niet-afronden zijn niet meegenomen in de beoordeling, omdat kennis over afronden geen onderdeel vormt van de test. Nadien wordt geïnventariseerd welke oplossingsstrategieën gekozen zijn voor dit onderdeel. Hierbij is een onderscheid

gemaakt tussen de traditionele staartdeling (s), kolomsgewijs rekenen (k), vermenigvuldigend rekenen (v). Er is geïnventariseerd of de leerlingen de antwoorden met een rest of decimaal (evt. breuk) geven. Aangezien het delen met een quotiënt in decimalen niet bij iedere leerling bekend zou kunnen zijn, zijn beide uitkomsten, indien goed uitgerekend, goed gerekend. Als de decimale uitkomst fout is dan is ook het antwoord fout gerekend. De procedurele kennis van het delen met een quotiënt in decimalen is meegenomen in de analyse.
Daarnaast heb ik bekeken hoeveel fouten en wat voor fouten de leerlingen gemaakt hebben. (k) geeft aan dat de leerling niet kan omgaan met delingen waarin een komma in deler of deeltal voorkomt. (r) rekenfouten, methode fouten (m). De laatste opgave is er een waarbij de declaratieve kennis van de omzetting van km naar meters en de omzetting van uren naar secondes naast de uitvoering van de opgave wordt getest. Door de ervaringen met de eerste drie klassen is besloten onderaan deze opgave een tip op te nemen, om ondersteuning te geven bij het oplossen van de opgave. Deze vraag is apart geanalyseerd. Bij de kolom fouten is onderscheid gemaakt tussen rekenfouten (f), goed (g), methodefouten (m) (0= nulfout) of een leerling die de opgave (door tijdgebrek) niet gemaakt heeft (t). Hieronder de verantwoording van de opgaven, antwoorden en adequate oplossingsstrategieën.

5555: 25 = 222,2 of 222 rest 5 1) Declaratieve kennis handig rekenen (uit het hoofd) 2) Procedure kennis en vaardigheid: Staartdeling 3) Procedure kennis en vaardigheid: Kolomsgewijs delen
301,6 : 3,2 = 94,2 of 94,3 of 94 rest 8 1) Staartdeling, wegwerken komma (x10) 2) Kolomsgewijs delen, wegwerken komma (x10)
81262 : 5 = 16252,4 of 16252 rest 2 1) Staartdeling, (omzetting rest in decimaal) 2) Kolomsgewijs delen, (omzetting rest in decimaal)
352:16= 22 1) Staartdeling, (omzetting rest in decimaal) 2) Kolomsgewijs delen
430:42 = 10,2 of 10 rest 10 1) Staartdeling, wat doet de leerling met de 0, (omzetting rest in decimaal) 2) Kolomsgewijs delen

62,22 : 17= 3,6 (6) of 3,7 1) Staartdeling, omgaan een decimaal getal als deeltal,(omzetting rest in decimaal) 2) Procedurele vaardigheid/kennis Kolomsgewijs delen, omgaan een decimaal getal als deeltal (omzetting rest in decimaal)
24 km/ uur = 6,7 of 6,66 of 6 2/3 m/ seconde (tip: hoeveel meter is 1 km. Hoeveel seconde zitten er in 1 min. en in 1 uur) 1) Declaratieve kennis omzetting van km/u naar m/s 2) Procedurele vaardigheid Handige rekenmethode :100 => 240/36=> 40/6 => 3) Procedurele vaardigheid Staartdeling, (vereenvoudiging deling (:100) 4) Procedurele vaardigheid Kolomsgewijs delen

Toetsonderdeel IV Breuken

Onderdeel IV zijn bewerkingen met breuken. Hierbij wordt getest of leerlingen de procedurele kennis/ vaardigheid hebben voor de verschillende bewerkingen (-, +, :, x). Om deze bewerkingen snel en adequaat te kunnen doen is het ook nodig dat leerlingen gebruik maken van declaratieve kennis zoals breuken vereenvoudigen, kleinste gemene deler.

Bij het nakijken zijn de verschillende type bewerkingen (-,/+, :, x) opgesplitst om beter inzicht te krijgen in de declaratieve/ procedurele kennis en procedurele vaardigheden. Fouten bij optellen en aftrekken en vermenigvuldigen zijn geïnventariseerd op rekenfouten (r), methodefouten (zoals fouten met gelijkmaken van de breuken) (m).

Van het onderdeel delen en vermenigvuldigen met breuken was vooraf bekend dat dit net buiten het curriculum lag van de basisschool, maar was toch besloten deze mee te nemen om een volledig inzicht te verkrijgen in de vaardigheid bewerkingen met breuken.

Bij de delingen is de informele strategie d.m.v. verhoudingen als handig (h). Wanneer geen bewerking wordt gegeven, of foute bewerking of fout uitgevoerde bewerking (n) wordt gegeven, wordt ervan uitgegaan dat de strategie niet bekend is.

De verantwoording van gekozen opgaven, antwoorden, en adequate oplossingsstrategie, staan hieronder weergegeven.

Optellen en aftrekken breuken (declaratieve kennis gelijk maken breuken)

$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$ 1) Procedurele vaardigheid: gelijkmaken noemer bij voorkeur op 12 2) declaratieve kennis gelijk maken breuken eenvoudig
$\frac{16}{5}-2\frac{2}{15}+\frac{2}{3}=1\frac{11}{15}$ 1) Procedurele kennis, gelijkmaken noemer kleinst gemene deler bij voorkeur op 15 2) Procedurele vaardigheid: aftrekken met samengestelde breuken.
$\frac{2}{6}+\frac{4}{16}+\frac{5}{12}=\frac{12}{12}=1$ 1) Procedurele kennis, gelijkmaken noemer bij voorkeur op 12 of 24 (eventueel 48) 2) Declaratieve kennis: vereenvoudigen van eenvoudige breuken. 2/6 = 1/3 en 4/16 =1/4
$\frac{11}{18}-\frac{3}{12}=\frac{13}{36}$ 1) Procedurele kennis, gelijkmaken deler bij voorkeur op 36 2) Declaratieve kennis: vereenvoudigen van eenvoudige breuken. 3/12 =1/4
Vermenigvuldigen breuken (Procedurele kennis/vaardigheid)
$\frac{2}{9}\times\frac{3}{6}=\frac{6}{54}=\frac{1}{9}$ 1) Direct zien dat het hier gaat om 2/9 x ½ of direct antwoord 2) Eenvoudige opgave. Test alleen procedurele kennis vermenigvuldigen breuken
$\frac{4}{7}\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{12}=\frac{1}{4}$ Complexere opgave 1) Procedurele kennis en vaardigheid; wegstrepen getallen boven en onder de streep. Of onderweg vereenvoudigen; vermenigvuldigen
$1\frac{2}{18}\times\frac{4}{6}\times\frac{6}{8}=\frac{5}{9}$ Vermenigvuldigen met een samengestelde breuken. (procedurele kennis/vaardigheid) 1) Procedurele kennis voor vereenvoudiging, wegstrepen getallen boven en onder de streep. Of onderweg vereenvoudigen. 2) Natuurlijk getal omzetten in breuk of gesplitst uitrekenen
Delen breuken d.m.v. verhoudingen (h) of procedurele kennis aanwezig(j/n)
$\frac{3}{8}:\frac{3}{12}=\frac{3}{8}\times\frac{12}{3}=1{,}5$ of $\frac{3}{8}:\frac{3}{12}=\frac{3}{8}:\frac{1}{4}=\frac{12}{32}:\frac{8}{32}=1\frac{1}{2}$ 1) Procedurele kennis/vaardigheid formele rekenstrategie: strategie delen is omkeren van deler en daarna vermenigvuldigen. 2) Procedurele vaardigheid/kennis informele (handige) methode met verhoudingen

berekenen door noemer gelijk te maken.
$\frac{4}{5}:\frac{5}{12}=\frac{4}{5}\times\frac{12}{5}=1\frac{23}{25}$ of $\frac{4}{5}:\frac{5}{12}=\frac{48}{60}:\frac{25}{60}=1\frac{23}{25}$ 1) Procedurele vaardigheid/kennis formele rekenstrategie: strategie delen is omkeren van deler en daarna vermenigvuldigen. 2) Informele methode met verhoudingen berekenen door noemer gelijk te maken.

Bijlage 6 Brief interventieprogramma voor de ouders

Geachte ouder,

Het Gymnasium X streeft ernaar de leerlingen een optimale begeleiding te geven gedurende hun schoolperiode. In sommige gevallen betekent dit dat we aan bepaalde leerlingen onderwijsondersteuning bieden. Op dit moment gebeurt dit al voor leerlingen met taalproblemen.

In het kader van mijn opleiding Master of Special Education Needs heb ik een rekentoets ontwikkeld om de basisschool rekenvaardigheden van de eerste klas leerlingen te toetsen. Uit de resultaten van deze toets is naar voren gekomen dat een aantal leerlingen gebaat zou zijn bij extra ondersteuning op het gebied van rekenen.

Deze ondersteuning ligt in lijn van het beleid van de school een rekenbeleid te ontwikkelen als voorbereiding op het rekenvaardighedenexamen. Het betreft in dit geval extra ondersteuning op het gebied van bewerkingen met vermenigvuldigen en/of delen en/of breuken zonder rekenmachine.

Deze week zal ik uw zoon of dochter benaderen met het verzoek deel te nemen aan een aantal modulair opgezette lessen. Elke module bestaat uit ±3 lessen en wordt afgerond met een toets. Bij vragen over het bovenstaande kunt u contact opnemen met de mentor van uw kind of met ondergetekende.

Met vriendelijke groet,

Mw. Drs. M.R. Postma-Bakkers

Docent en RT-io Gymnasium X

Email: X

Bijlage 7 Interventieprogramma vermenigvuldigen en delen

De opgaven zijn voor een groot deel overgenomen uit het boek Basisboek rekenen (Craats & Bosch, 2007) en uit de methode naar zelfstandig rekenen. (Zandvoort et al, 1970)

Les 1. Basis voor cijferend rekenen: vermenigvuldigen

- De eenvoudigste vermenigvuldigingen zijn de vermenigvuldigingen van 0 t/m 9. Met deze kennis kun je elke vermenigvuldiging op papier maken. Je moet je wel realiseren dat:

28 x 1 =	hetzelfde is als:
28 x 10 =	met 0 erachter
28 x 100 =	met 00 erachter
28 x 1000=	met 000 erachter
280 x 100=	met 000 erachter

I. 4 x 963

Vroeger heb je geleerd dat je deze opgave in drie stappen kan doen.

4 x 3	= 12	of	963
4 x 60	= 240		4 x
4 x 900	= 3600 +		12
			240
			3600 +

Nu kan je die stappen ook in één keer doen, met de kennis van hierboven.

963		963		963
4 x	→	4 x	→	4 x
2		52		3852

Toelichting

4 x 3 = 12	2 opschrijven	$\boxed{1}$ onthouden
4 x 6 = 24	24 + $\boxed{1}$ = 25	5 opschrijven $\boxed{2}$ onthouden.
4 x 9 = 36	36 + $\boxed{2}$ = 38	Klaar.

Even oefenen. Gebruik het cijferend rekenen. Controleer de uitkomst

a.	b.	c.	d.	e.
14	25	354	567	433
8 ×	7x	6 ×	4 ×	4 ×

II. 253 x 74

Vroeger heb je geleerd deze opgave in meerdere stappen te doen.

4 x 253 =
70 x 253 =

```
  253
   74 x
   12     (4 x 3)
  200     (4 x 50)
  800     (4 x 200)
  210     (70 x 3)
 3500     (70 x 50)
14000 +   (70 x 200)
18722
```

Ook deze opgave kan korter.

```
  253
   74 x
 1012
17710 +
18722
```

Toelichting:

Rij 1: 4 x 3 = 12 *schrijf 2 onthoud 1*; 4 x 5= 20, 20 + 1 = 21 *schrijf 1 onthoud 2*; 4x2= 8, 8+2= 10

Rij 2: *Regel*: 70 x *is hetzelfde als* 7 x *met 0 erachter, dus start met een 0*: 7 x 3 = 21 *schrijf 1 onthoud 2*; 7 x 5= 35, 35 +2=37 *schrijf 7 onthoud 3*; 7 x 2 =14, 14 + 3= 17

Even oefenen. Gebruik het cijferend rekenen. Controleer je antwoord.

54 x 26 =
38 x 47 =
44 x 39 =
106 x 35=

Kun je nu ook deze opgave 6148 x1227 = ? Let op het aantal nullen bij elke rij!!!

III. Wanneer in het getal waarmee je vermenigvuldigt een 0 voorkomt, wordt de bijbehorende rij ook nul. Je mag deze rij dan ook weglaten. (Zo´n nulrij laten we altijd weg). Let dan wel op dat je in de volgende regel één of meer extra nullen moet invoegen!!!

Een voorbeeld. 78359 x 40603 =

```
   78359          wordt:     78359
   40603 x                   40603 x
   235077                    235077
       00                  47015400
 47015400            3134360000 +
    0000             3181610477
3134360000 +
3181610477
```

IV. Maak onderstaande sommen. Huiswerk. Controleer berekening!!!

V. Opgaven uit Basisboek rekenen

3.47 $\begin{array}{r} 13 \\ \underline{4} \end{array} \times$

3.48 $\begin{array}{r} 14 \\ \underline{5} \end{array} \times$

3.49 $\begin{array}{r} 14 \\ \underline{7} \end{array} \times$

3.50 $\begin{array}{r} 18 \\ \underline{9} \end{array} \times$

3.51 $\begin{array}{r} 17 \\ \underline{6} \end{array} \times$

3.52 $\begin{array}{r} 13 \\ \underline{9} \end{array} \times$

3.53 $\begin{array}{r} 18 \\ \underline{6} \end{array} \times$

3.54 $\begin{array}{r} 15 \\ \underline{4} \end{array} \times$

3.55 $\begin{array}{r} 23 \\ \underline{7} \end{array} \times$

3.56 $\begin{array}{r} 36 \\ \underline{4} \end{array} \times$

3.57 $\begin{array}{r} 28 \\ \underline{3} \end{array} \times$

3.58 $\begin{array}{r} 45 \\ \underline{8} \end{array} \times$

3.59 $\begin{array}{r} 87 \\ \underline{3} \end{array} \times$

3.60 $\begin{array}{r} 37 \\ \underline{6} \end{array} \times$

3.61 $\begin{array}{r} 82 \\ \underline{5} \end{array} \times$

3.62 $\begin{array}{r} 55 \\ \underline{5} \end{array} \times$

3.63 $\begin{array}{r} 85 \\ \underline{13} \end{array} \times$

3.64 $\begin{array}{r} 57 \\ \underline{61} \end{array} \times$

3.65 $\begin{array}{r} 25 \\ \underline{52} \end{array} \times$

3.66 $\begin{array}{r} 69 \\ \underline{59} \end{array} \times$

3.67 $\begin{array}{r} 173 \\ \underline{32} \end{array} \times$

3.68 $\begin{array}{r} 547 \\ \underline{16} \end{array} \times$

3.69 $\begin{array}{r} 822 \\ \underline{75} \end{array} \times$

3.70 $\begin{array}{r} 205 \\ \underline{51} \end{array} \times$

3.71 $\begin{array}{r} 173 \\ \underline{23} \end{array} \times$

3.72 $\begin{array}{r} 343 \\ \underline{126} \end{array} \times$

3.73 $\begin{array}{r} 572 \\ \underline{715} \end{array} \times$

3.74 $\begin{array}{r} 225 \\ \underline{431} \end{array} \times$

3.75 $\begin{array}{r} 1189 \\ \underline{371} \end{array} \times$

3.76 $\begin{array}{r} 3117 \\ \underline{1156} \end{array} \times$

3.77 $\begin{array}{r} 5872 \\ \underline{435} \end{array} \times$

3.78 $\begin{array}{r} 3470 \\ \underline{1131} \end{array} \times$

3.79 $\begin{array}{r} 146 \\ \underline{24} \end{array} \times$

3.80 $\begin{array}{r} 356 \\ \underline{261} \end{array} \times$

3.81 $\begin{array}{r} 245 \\ \underline{115} \end{array} \times$

3.82 $\begin{array}{r} 546 \\ \underline{349} \end{array} \times$

3.83 $\begin{array}{r} 493 \\ \underline{320} \end{array} \times$

3.84 $\begin{array}{r} 355 \\ \underline{206} \end{array} \times$

3.85 $\begin{array}{r} 450 \\ \underline{705} \end{array} \times$

3.86 $\begin{array}{r} 169 \\ \underline{403} \end{array} \times$

3.87 $\begin{array}{r} 1189 \\ \underline{301} \end{array} \times$

3.88 $\begin{array}{r} 3561 \\ \underline{1006} \end{array} \times$

3.89 $\begin{array}{r} 1772 \\ \underline{4300} \end{array} \times$

3.90 $\begin{array}{r} 4070 \\ \underline{1030} \end{array} \times$

3.91 $\begin{array}{r} 4581 \\ \underline{7111} \end{array} \times$

3.92 $\begin{array}{r} 5628 \\ \underline{6060} \end{array} \times$

3.93 $\begin{array}{r} 1888 \\ \underline{1408} \end{array} \times$

3.94 $\begin{array}{r} 4110 \\ \underline{3103} \end{array} \times$

3.95 $\begin{array}{r} 34081 \\ \underline{1313} \end{array} \times$

3.96 $\begin{array}{r} 15529 \\ \underline{1067} \end{array} \times$

3.97 $\begin{array}{r} 81871 \\ \underline{90302} \end{array} \times$

3.98 $\begin{array}{r} 47112 \\ \underline{30111} \end{array} \times$

Les 2. Basis voor cijferend rekenen met komma`s

Ook hier geldt dat je elke vermenigvuldiging kunt maken met de tafels van 0 t/m 9.
Je moet je wel realiseren dat

28 x 1 =	hetzelfde is als:
28 x 0,1 =	de komma 1 plaats verschoven: 2,8
28 x 0,01 =	de komma 2 plaatsen verschoven: 0,28
28 x 0,001 =	de komma 3 plaatsen verschoven: 0,028
0,28 x 0,1=	de komma 3 plaatsen verschoven: 0,028

Neem het opgave uit de toets. Hierin moest je uit je hoofd uitrekenen de deling:
108: 9= en even later 10,8: 9= Zie je nu direct de uitkomst van beide? 12 en 1,2. Controleer de opgaven maar. Delen is het omgekeerde van vermenigvuldigen.

I. Nog een keer het voorbeeld van les 1 : 4 x 963, maar nu 9,63 x4
Het eerste deel is precies hetzelfde. We doen net alsof er geen komma staat. De komma zetten we er in het antwoord in.

```
 96,3
   4
 3852
```

Nu zie je 1 cijfer achter de komma staan, dus ook in het antwoord tel je nu 1 cijfer vanaf rechts dus het antwoord is 385,2

Even oefenen. Gebruik het cijferend rekenen. Controleer de uitkomst.
3,75 x 3 =
41,3 x 12 =

II. Wat nu als er 2 getallen zijn met komma´s? Je telt de totaal aantal cijfers achter de komma gewoon op.
Voorbeeld: 0,75 x 1,456. Kun je het antwoord ook schatten? 0,75 x 1,5 ~ 1,1 en het moet eindigen op een 0. Zie je dat ook?

```
  1,452          1,452
   0,75           0,75
   7260             7260
 101640   →      101640 +
     000 +       1,08900
 108900
```

Toelichting
5 x 2 = 10 *Schrijf* 0 *onthoud* 1
5 x 5 = 25 25 + 1 = 26 *Schrijf* 6 *onthoud* 2
5 x 4= 20 20 + 2= 22 Schrijf 2 onthoud 2
5 x 1 = 5, 5 + 2 = 7
Schrijf nu de 0 eerst want je vermenigvuldigd met 70 en niet met 7
7 x 2 = 14 Schrijf 4 onthoud 1
7 x 5 = 35, 35 + 1 = 36 Schrijf 6 onthoud 3
7 x 4 = 28, 28 + 3 = 31 Schrijf 1 onthoud 3
7 x 1 = 7, 7 +3 = 10
De rij met nullen laat je weg.
En nu de plaats van de komma. 1,452: 3 cijfers achter de komma
0,75: 2 cijfers achter de komma
Totaal 3+2 = 5 cijfers achter de komma, dus tel je 5 cijfers van rechts. Dus het antwoord is; 1,08900

Weer even oefenen.
12,67 x 0,2 =
0,3 x 0,2 =
0,751 x 2,4 =

III. Afronden. Afronden op cijfers achter de komma noemen we afronden op **decimalen**.
Je kunt een getal op een aantal decimalen afronden.

Om een getal te kunnen afronden bepaal je eerst op hoeveel cijfers nauwkeurig je gaat afronden.
Meestal is dat gegeven of als het om geld gaat zijn het er 2.
Vervolgens kies je het getal met de vereiste nauwkeurigheid dat het dichtste bij het af te ronden getal ligt.
Bij een 5 of hoger aan het eind van een getal rond je af naar boven.
Voorbeeld

- 246,35 afgerond op hele getallen nauwkeurig is: 246. (je kijkt alleen naar de 3)
- 246,35 afgerond op één decimaal nauwkeurig is: 246,4 km. (je kijkt nu alleen naar de 5)
- 2,4635 afgerond op twee decimalen nauwkeurig is: 2,46 (je kijkt alleen naar de 3)

Afronden is niet hetzelfde als '**afkappen**'.
Bij afkappen laat je een aantal decimalen weg.
Voorbeeld
246,35 afkappen op één decimaal levert 246,3. Cijfers na de eerste decimaal laat je weg.

De leerlingvalkuil
Leerlingen houden ervan om het proefwerkcijfer 5,45 in twee stappen af te ronden: 5,45 → 5,5 → 6.
Volgens de regels van het afronden geldt echter:

- 5,45 afgerond op één decimaal nauwkeurig is 5,5 en dat blijft zo staan.
- 5,45 afgerond op een geheel getal nauwkeurig is 5, want dat ligt dichter bij 5,45 dan 6.

Zo kan het dus gebeuren dat je aan het eind van het jaar een 5,5 staat en toch een 5 op je eindrapport hebt staan. Magister rondt de tussenrapporten af op 1 decimaal (5,45 → 5,5) en het eindrapport op gehele getallen (5,45→ 5).

Ga nu oefenen. Controleer je antwoord!!!

6.21	6.22	6.23	6.24
1,3	1,1	1,4	1,8
1,4 ×	1,5 ×	0,7 ×	1,9 ×
6.25	6.26	6.27	6.28
1,7	1,3	1,8	1,5
0,6 ×	1,3 ×	1,3 ×	2,4 ×
6.29	6.30	6.31	6.32
2,3	0,36	0,028	45,1
0,17 ×	0,4 ×	0,3 ×	1,8 ×
6.33	6.34	6.35	6.36
87,5	37,1	0,82	5,51
3,5 ×	6,25 ×	0,05 ×	0,5 ×

Les 3 Toepassen van vermenigvuldigingen: Rond op eurocenten af Opgaven uit Basisboek rekenen

1) 5% van € 22, 75
2) 6% van € 13, 30
3) 9% van € 56, 04

4) Een rechthoek heeft een afmeting van 3,6 cm bij 8,4 cm. Wat is het oppervlak? Rond af op 1 decimaal.

5) Een aquarium heeft de afmetingen 4,1m bij 6,6m bij 5,2m. Bereken de inhoud. Rond af op 2 decimalen.

6.37
8,05
1,3 ×

6.38
5,7
6,1 ×

6.39
2,5
52,7 ×

6.40
69,4
0,59 ×

6.41
17,3
0,32 ×

6.42
54,7
1,6 ×

6.43
82,2
0,75 ×

6.44
20,5
5,1 ×

6.45
17,3
3,2 ×

6.46
0,343
0,126 ×

6.47
5,72
0,715 ×

6.48
2,25
43,1 ×

6.49
11,89
37,1 ×

6.50
3,117
115,6 ×

6.51
0,5872
43,5 ×

6.52
34,7
11,31 ×

6.53 Een leerling krijgt 0,25^{ste} deel van 1,75 euro. Hoeveel geld krijgt hij? Let op de afronding. Er bestaan geen kleinere munten dan een eurocent.

€ 1,75
<u>0,25</u> x

Opdracht 2. Rond af
opdracht 6. 21, 6.24, 6.31,6.51

a. Gehele getallen

b. 1 decimaal
c. 2 decimalen
d. Kap af op 1 decimaal.

Huiswerk. Maken de opdrachten. Volgende keer (vrijdag 7e uur) hebben we een kleine toets en nog wat opdrachten. De les duurt dan 30 minuten langer.

Les 4 Toets vermenigvuldigen

1. Reken uit:

a) 39 x 35 = b) 44 x 81 = c) 162 x 45 = d) 35802 x 8835 =	e) 15,6 x 0,3 = f) 34,7 x 11,31 = g) 0,034 x 1,4 =

Interventieprogramma Delen

Les 1 Basis voor Cijferend rekenen; Delen

- Namen: deeltal, deler, quotiënt. Deeltal : deler = quotiënt
- Op de basisschool heb je geleerd een deling op de volgende manieren op te lossen.

Voorbeeld: 1491 : 3 = €1311 : 92 =

1. Herhaald aftrekken (Hap methode) 1491 900 - 300 x 3 591 300 - 100 x 3 291 270 - 90 x 3 21 21 - 7 x 3 + 0 totaal: 300 + 100 +90 +7 = 497	2. 92 / 1311 920 - 10 x 92 391 368 - 4 x 92 23 dus 14 rest 23 of als je verder gaat 18,40 - 0,2 x 92 4,60 4,60 - 0,05 x 92 0 totaal 10 + 4 + 0,2 + 0,05 = € 14,25

Nadeel: meer schrijfwerk, duurt langer, meer rekenfouten door de komma getallen.

- **Staartdeling**

Een snellere en eenvoudigere methode is de staartdeling.
Voordeel: je hoeft nooit met komma getallen te werken, maximaal de deler met 9 te vermenigvuldigen, sneller.
Echter er is 1 voorwaarde: neem altijd de grootste keersom die kan.(=grootste veelvoud)!!!!

I. Kijk op you tube: http://www.youtube.com/watch?v=oDte8RbJDps
Voorbeeld 1491 : 3 In 3 stappen

1. 3 / 1491 \ 4 12 2	2. 3 / 1491 \ 49 12 : 29 27 2	3. 3 / 1491 \ 497 12 : : 29 : 27 : 2 1 2 1 0

Toelichting 1. Begin van links naar rechts van de deeltal. Hoe vaak kan 3 in 1= ?
dan 1 cijfer erbij. Hoe vaak gaat 3 in 14. Neem de ***grootste*** veelvoud = 4 keer. Schrijf rechts van deelstreep 4. Vermenigvuldig 4 x3 = 12. Trek 12 van 14 af

2. Haal er nu 1 cijfer bij: 9 dus 29. Neem de ***grootste*** veelvoud. Reken uit 29:3 = 9, schrijf de 9 rechts, 29-27 = 2
3. Haal 1 cijfer bij: 1 dus 21. Neem de *grootste* veelvoud. Reken uit 21 :3 = 7, schrijf rechts de 7. 21-21=0

Even oefenen. Gebruik het cijferend delen. **Vergeet niet, neem steeds de grootste veelvoud.** Controleer je antwoord.

a. 6 / 102 \ b. 8 / 5208 \ c. 6 / 882 \ d. 14/ 3612 \ e. 23/ 5750\

II. Delen met rest. Een rest kun je opschrijven als een decimaal getal. Dit gaat heel eenvoudig. Voorbeeld van hierboven 1311 : 92 =
92 / 1311 \

92 / 1311 \ 1 92 39	92 / 1311 \ 14 92 : 39 1 36 8 2 3	92 / 1311, \ 14**, 2** 92 : : 39 1 : 36 8 : 2 3 0 1 8 4 4 6	92 / 1311, \ 14**, 25** 92 : : : 39 1 : : 36 8 : : 2 3 0 : 1 8 4 : 4 6 0 4 6 0 0

Toelichting 1. Begin links naar rechts van de deeltal. Hoe vaak 92 in 1= ?
dan 1 cijfer erbij. Hoe vaak gaat 92 in 13=?. Weer 1 cijfer erbij. Hoe vaak gaat 92 in 131. Neem de ***grootste*** veelvoud = 1 keer. Schrijf rechts van deelstreep 1. Vermenigvuldig 1 x92 = 92. Trek 92 van 131 af.

2. Haal er nu 1 cijfer bij: 1 dus 391. Neem de ***grootste*** veelvoud. Reken uit 391:92 = , schrijf de 4 rechts, 391-368 = 23
3. De rest is 23. Zetten we de rest om in decimalen. Dus eigenlijk reken we uit 23:92 Er zijn geen cijfers meer over in het deeltal. Dus zetten we er **een komma achter het deeltal**. Tevens zetten we een **komma achter het quotient (uitkomst**).
Haal 1 cijfer achter de komma op: 0 dus 230.
Neem de grootste veelvoud. Reken uit 230 : 92 = 2, schrijf rechts de 7. 230-184 = 46
4. Haal nu nog een 0 op. (dit mag je eindeloos doen). Dus 460.→ 460 : 92 = 5

III. Maak de eerste 7 opgaven in de klas. De rest is huiswerk. Controleer je berekening. Rond af op 1 decimaal.(zie onder afronden).

Je zult merken dat het schatten het moeilijkste is. Het helpt soms om even een klein rijtje naast je staartdeling te maken. 1x, 2x, 5x, 10x (denk dan 9x = 10x -1x en 6x = 5x + 1x)

a. 388 : 4 = b. 728 : 8 = c. 445 : 5 = d. 503 : 5 = e. 290 : 3 = f. 903 : 7 = g. 4503 : 4 =	h. 700 : 12 = i. 972 : 18 = j. 656 : 14 = k. 1983 : 18 = l. 1865 : 16 = m. 51800: 33 = n. 5353 : 23 = o. 4543 : 65 =

Controleer nu je antwoorden . Je weet dat delen is het omgekeerde van vermenigvuldigen.
Voorbeeld 24 : 6 = 4 dus 4 x 6 = 24.
Doe dat ook cijferend (onder elkaar). Door het afronden klopt je antwoord niet helemaal.

Afronden:
Het getal 1,34954827 kun je afronden op:
Eén decimaal: 1,3 →dus de deling reken je uit t/m 2 decimalen.
Twee decimalen: 1,35 →dus de deling reken je uit t/m 3 decimalen.
Drie decimalen: 1,350 →dus de deling reken je uit t/m 4 decimalen.
Vier decimalen: 1,3495 →dus de deling reken je uit t/m 5 decimalen.
Vijf decimalen: 1,34955 →dus de deling reken je uit t/m 6 decimalen.
Zes decimalen: 1,349548 →dus de deling reken je uit t/m 7 decimalen.
Zeven decimalen: 1,3495483 →dus de deling reken je uit t/m 8 decimalen.
Acht decimalen: 1,34954827 →dus de deling reken je uit t/m 9 decimalen.

IV. Maak onderstaande opgaven thuis. Maak elke dag 1 rijtje. Maandag 7/8 e uur 212. Niet vergeten.

Opgaven uit Basisboek rekenen

Maak de volgende opgaven. Als je die af hebt, ben je een volleerd staartdeler!

4.29
a. 21 / 70707 \
b. 38 / 93747 \
c. 25 / 42513 \
d. 29 / 91399 \
e. 34 / 68136 \

4.30
a. 145 / 18533 \
b. 163 / 19862 \
c. 155 / 85813 \
d. 167 / 90615 \
e. 136 / 44806 \

4.31
a. 230 / 34700 \
b. 481 / 92702 \
c. 705 / 11453 \
d. 910 / 34999 \
e. 714 / 63565 \

Als meesterproef volgen hieronder nog drie rijtjes grote staartdelingen. Om de moed erin te houden, hebben we ervoor gezorgd dat ze allemaal uitkomen, dat wil zeggen dat de rest telkens 0 is!

4.32
a. 321 / 13803 \
b. 185 / 14985 \
c. 205 / 28085 \
d. 591 / 52008 \
e. 919 / 59735 \

4.33
a. 59 / 27435 \
b. 72 / 64944 \
c. 55 / 27885 \
d. 43 / 28853 \
e. 36 / 4824 \

4.34
a. 307 / 52497 \
b. 152 / 69464 \
c. 394 / 40582 \
d. 691 / 76701 \
e. 414 / 80730 \

Les 2 cijferend delen met komma's

I.Delen met een komma getal in de deler of het delertal. Hoe los je dat op.
Voorbeeld

1311 : 9,2 =
Uit het voorbeeld van de vorige les, weten we dat

1311: 92 = 14,25

Voordat je antwoord geeft realiseer je dat:
28 : 1 = 28
28 : 0,1 = 280 De komma verschuift steeds 1 plaats
28 : 0,01 = 2800
28 : 10 = 2,8

En dat is eenvoudig te bergrijpen als je van een deling een vermenigvuldiging maakt.
28 x 1 = 28
280 x 0,1 = 28 enz

Hoe benaderen we een opgaven van 1311 : 9,2 = Delen met komma getallen is niet eenvoudig.
Maar als we de opgaven omzetten.
1311: 9,2 → 13110 : 92

Dus vermenigvuldig de deler met 10 of 100 en zorg dat het een natuurlijk getal wordt. Maak elke dag 1 rijtje. Opgaven uit Basisboek rekenen

12,76 : 8 =	29,34 : 8 =	42,09 : 17 =
17,35 : 3 =	33,25 : 7 =	36,99 : 19 =
16,43 : 5 =	21,87 : 9 =	27,33 : 16 =
14,88 : 6 =	46,51 : 8 =	29,02 : 15 =
19,43 : 9 =	24,11 : 5 =	32,44 : 18 =

Maak de deling en rond het quotiënt af op 2 decimalen

23 : 1,8 =	15 : 1,8 =	1 : 0,04 =
37 : 0,7 =	70 : 0,12 =	1 : 0,19 =
26 : 3,5 =	37 : 0,19 =	1 : 0,06 =
18 : 0,7 =	48 : 1,3 =	1 : 0,03 =
49 : 7,6 =	34 : 1,1 =	1 : 0,13 =

2,4 : 1,2 =	0,15 : 1,8 =	1,4 : 0,04 =
3,7 : 0,9 =	0,77 : 0,12 =	3,7 : 0,15 =
5,6 : 4,5 =	0,14 : 0,19 =	9,9 : 0,06 =
1,8 : 2,7 =	0,52 : 1,3 =	4,2 : 0,03 =
4,9 : 7,7 =	0,74 : 1,1 =	8,4 : 0,13 =

Les 3 Toepassen van staartdelingen opgaven uit naar zelfstandig rekenen.

1. Ik heb een jurk gekocht van € 165,- en daarop € 15 korting gekregen. Hoeveel procent korting kreeg ik?
2. Jan heeft veel knikkers gewonnen, maar gaat nu naar het VO en geeft zijn 1296 knikkers weg. Hij geeft ze weg aan zijn broertje en 5 vriendjes van hem. Hoeveel knikkers krijgt elk.
3. De omtrek van de aarde is ± 40.000km Deze afstand legt elk punt op de evenaar in 24 uur af. Hoe groot is de snelheid per uur dat de aarde draait. (2 decimalen afronden.)
4. Van een tuin is de breedte 10 m minder dan de lengte. Als de omtrek 160m is, hoeveel m^2 is dan de oppervlakte
5. Staartdelingen kun je ook in je hoofd maken als ze niet te moeilijk zijn. Doe deze som uit het hoofd. Geef het getal achter de komma als rest weer.
   77777 : 2 =
   77777 : 10 =
   77777 : 5 =
6. Hoeveel moet je optellen bij 73 759 om hem deelbaar te maken door 10 ?
   Hoeveel moet je optellen bij 73 759 om hem deelbaar te maken door 3 ?
   Hoeveel moet je optellen bij 73759 om hem deelbaar te maken door 25 ?
   Hoeveel moet je optellen bij 73759 om hem deelbaar te maken door 9 ?

7. Je kunt 3 : 4 ook opschrijven als een breuk. En deze uitrekenen in een komma getal
   $\frac{3}{4} = 0{,}75$
   Doe hetzelfde met rond af op 3 decimalen. Gebruik de staartdeling.
8. $\frac{1}{6} =$
9. $\frac{1}{7} =$

Huiswerk: Maak onderstaande delingen. Maak elke dag 4 opgaven. Volgende keer krijg je een kleine toets

21 / 70707 \	145 / 18533\	705 / 11453\
38 / 93747 \	163 /19862 \	481 / 92702\
25 /42513 \	155 / 85813\	205 / 28085\
29 / 91399 \	230 / 34700\	55 / 27885\
34 / 68136 \	481 / 92702 \	414 / 80730\
36 / 4824\	691 / 76701\	152 / 69464\

Opgaven uit Basisboek rekenen

Les 4 toets cijferend delen. Rond af op 2 decimalen.

1) 1222,4 : 1,28 = 955
2) 17425 : 42 = 4141,88
3) 423,36 : 4,07 = 104,02
4) 169184 : 136 = 1244
5) 0,075 : 0,23 =0,33
6) 53603 : 2,65 = 20227,5

Bijlage 8 Opzet van de lessen interventieprogramma.

Elke module bestaat uit 4 lessen 1 keer per week. Elke les start met een uitleg over een procedure met natuurlijke eenvoudige getallen, waarna leerlingen zelfstandig een aantal opgaven maken. Het inzicht in de procedure wordt verhoogd door traditionele algoritmes naast de kolomsgewijze (of splitsend) rekenstrategieën te zetten. Zelf loop ik rond om leerlingen individueel te helpen. Na afloop controleren leerlingen zelf de uitkomsten met de rekenmachine. De fouten bespreek ik met de (soms individueel) leerlingen waarbij ik aandacht besteed aan procedurele fouten, maar ook aan rekenfouten om zo de metacognitieve kennis en vaardigheden te verbeteren.

De didactiek is sturend en gebaseerd op voordoen en nadoen. Het automatiseren wordt gestimuleerd door de leerlingen de opdracht te geven elke dag een paar opgaven te maken.

De doelstellingen voor de module vermenigvuldigen zijn achtereenvolgens:

1. Inzicht geven in de procedure door verband te leggen met bekende procedures voor cijferend vermenigvuldigen.
2. Eigen maken van de traditionele algoritme. De procedure wordt stap voor stap voorgedaann met ééncijferig en tweecijferige vermenigvuldiging. Na kort oefenen wordt de instructie vervolgd met een tweecijferige vermenigvuldiging. Daarna wordt de algoritme met een groot aantal opgaven geoefend. Leerlingen worden gestimuleerd elke dag een paar opgaven te maken.
3. Inzicht geven in vermenigvuldigen met getalsstructuren met decimale breuken. De procedure wordt door mij stap voor stap voorgedaan. In de nabespreking maak ik gebruik van bestaand rekenkundig inzicht van de leerlingen om zo het inzicht in de procedures en de metacognitieve vaardigheden te stimuleren.
4. Toepassen van de algoritme binnen het domein procenten en meten.
5. Toetsing van de procedurele kennis en vaardigheden van de algoritme

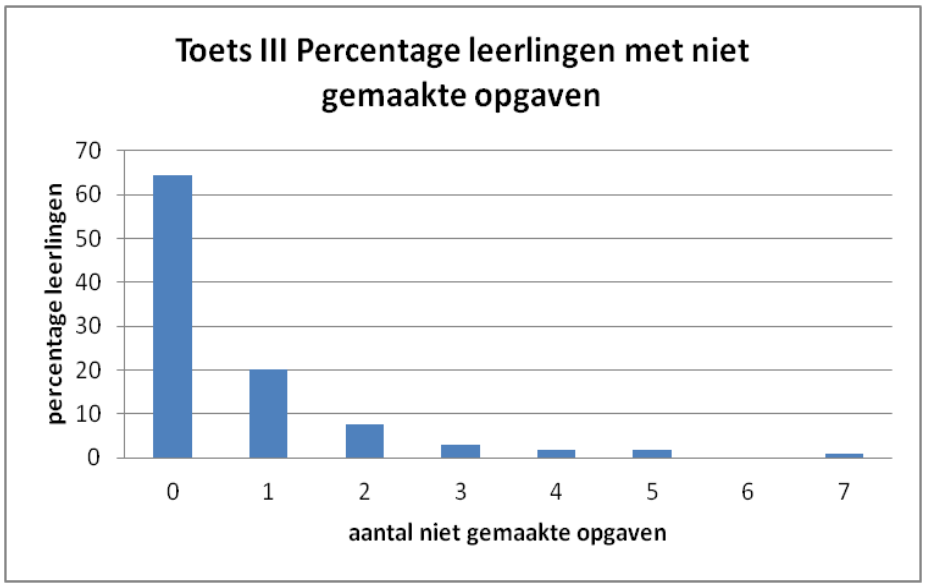
De doelstellingen voor de module delen zijn achtereenvolgens:

1. Inzicht geven in de staartdeling door verband te leggen met bekende procedure kolomsgewijs delen.
2. Eigen maken van de procedure. De procedure stap voor stap voordoen met een ééncijferige deler. Na kort oefenen, wordt de instructie

vervolgd met de procedurele kennis van ´rest´naar decimaal quotiënt. Daarna wordt de staartdeling met een groot aantal opgaven geoefend.

3. Algoritme toepassen met kommagetallen als deler. Leerlingen worden gestimuleerd elke dag een paar opgaven te maken.
4. Toepassen van staartdeling in domein procenten en meten.
5. Verband leggen tussen de notatie voor breuken, delingen. Door middel van de staartdeling leren leerlingen een breuk omzetten in een decimale breuk.
6. Toetsing algoritme staartdeling

Bijlage 9 Aantal niet gemaakte opdrachten bij toets III delen.

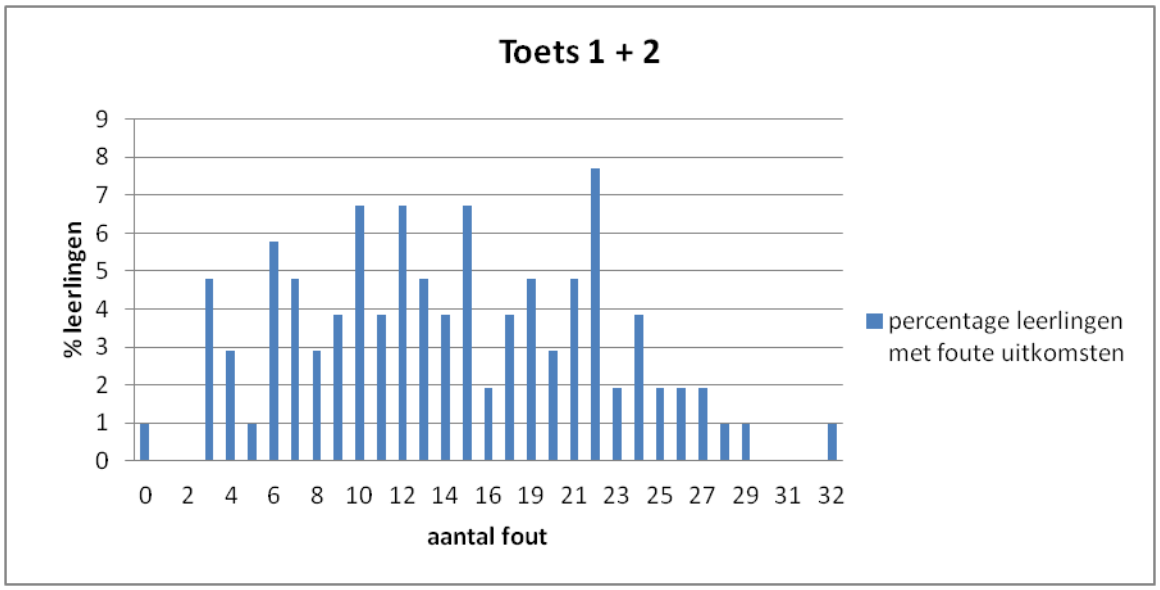


Bijlage 10 Aantal niet gemaakte opdrachten bij toetsonderdeel IV breuken.

Tabel 6
Legenda voor delen met breuken:
aantal leerlingen 104
Uitleg tabel: het dikgedrukte cijfer geeft het aantal fouten aan en het totaal aantal leerlingen dat zoveel fouten maakt.
Bijv. **5** fouten zijn gemaakt door 15% van de leerlingen (16 absoluut). 1 leerling heeft 5 opgaven niet gemaakt en dus 4 wel. De gemaakt opgaven waren foutloos .
Bijv. Totaal aantal leerlingen dat 0-2 opgaven niet gemaakt heeft: 5+ 4+ 9+8+6+12+10+9+8= 63

breuken totaal 9 aantal fout	breuken totaal 9 niet gemaakte opgaven	breuken aantal leerlingen met aantal fout	breuken percentage leerlingen met x fout %
0	**0**	**5**	**5**
1	**0**	**4**	**4**
2	**0-2**	**9**	**9**
3		**8**	**8**
3	0-2	6	
3	3	2	
4		**16**	**15**
4	0-2	12	
4	3-4	4	
5		**16**	**15**
5	0-2	10	
5	3-4	5	
5	5	1	
6		**21**	**20**
6	0-2	9	
6	3-4	8	
6	5-6	4	
7		**16**	**15**
7	0-2	8	
7	3-4	4	
7	5-6	2	
7	7	2	
8		**7**	**7**
8	0-4	3	
8	7-8	4	
9		**2**	**2**
9	4	1	
9	8	1	

Bijlage 11 Toets 1 + 2 gecombineerd. Het totaal aantal fouten over beide toetsen



Bijlage 12 Resultaten interventie Vermenigvuldigen

leerling	Toetsdeel II vermenigvuldigen totaal 8 opgaven aantal fout	Strategie: splitsen/ kolom / cijferen tradit. / handig	type fouten reken /komma/ methode	uitleg	resultaten toets 2 na interventie 7 opgaven
1	6	k	r,k	Deel van vermenigvuldigen met decimaal gaat fout: plaatst komma verkeerd vb 0,2 x0,3 =0,6 ipv 0,06	2 fout, rekenfout (d,g)
2	6	k	m	Oplossingsstrategie vaag: hoofd- met iets kolomrekenen, schatten	2 fout, slordige rekenfout (d,g)
3	4	s	k,r	2 opgaven niet gemaakt, geeft aan opgaven komma getallen niet te kunnen.	2 fout, rekenfout (d,e)
4	5	s	k,r	2 opgaven niet gemaakt, eenvoudige komma getallen lukken wel.	1 fout
5	5	k,h	m,r	Bij kolomsgewijs reken nullen vergeten. Bij opgaven met kommagetallen stapt hij zover dit lukt over op handige rekenstrategie	1 fout, rekenfout (d)
6	4	k,s	k,r	Opgaven met komma getallen stapt ze over naar splitsen. Gevolg rekenfouten	1 fout, rekenfout (d)
7	7	c	r,k,m	Moderne verkorte methode, gevolg r,k,	0 fout
8	8	kent geen	alles	Doet alles met schatten en maakt dan nog fouten en niet alle opgaven gemaakt.	1 fout, rekenfout (d)

Legenda: Kolom Strategie: k: kolomsgewijs rekenen
s: splitsend rekenen
h: handige rekenmethode
c: traditioneel cijferend rekenen

Kolom type fout: r: rekenfout
m: methode

Kolom: toets 2: (d,e,g) verwijzen naar de opgave zie bijlage 7

Bijlage 13 Resultaten interventie Delen

Leerlingen	Delen totaal 7 aantal fout	Strategie kolom/ staart/ vermenigv	Probleem komma, rekenfout, tempo, methode	uitleg	Resultaten toets 2 na interventie 6 opgaven
5	4	k	r,k	Alleen rekenen met kommagetallen gaat niet goed. 1 rekenfout	2 fout (reken-, en procedure fout
4	6 (1)	v	k	Strategie: staps gewijs vermenigvuldigen, splitst deeltal. 1 vraag gemist.	1 fout, procedure fout
8	5	k	k	Heeft alleen een poging met kolomsgewijs delen gedaan op vraag 1	1 fout, rekenfout

Legenda: Kolom: Delen; (1) niet gemaakte opgaven
Kolom: Strategie: k: kolomsgewijs rekenen
v: vermenigvuldigen
Kolom: Probleem: k: kommagetallen
r: rekenfout