

Intuïtieve wiskunde

-Karen de Kort, Wiskunde Master, Fontys Hogescholen Tilburg-

01-04-2021



Samenvatting

Dit artikel betreft een onderzoek naar de betrokkenheid van leerlingen bij wiskunde A op Havo 4. Betrokkenheid kan worden verhoogd door leerlingen een gevoel van autonomie te geven, in te spelen op hun interesse, effectieve leerstrategieën aan te leren en feedback te geven (Hattie, 2009).

Een andere manier om naar motivatie en eigenaarschap te kijken is de Fenomenologie, een filosofische stroming die het wezen van de waarneming beschrijft, zonder gebruik te maken van vooropgezette kennis, onbevooroordeeld en zuiver benaderd.

De Fenomenologie maakt geen onderscheid tussen lichaam en geest. Leren gebeurt niet alleen met het hoofd, maar met het lichaam als geheel (Merleau-Ponty, 2003). Bij een wiskundig bewijs, of een natuurkundig fenomeen, wordt de wereld geëxpliciteerd, geabstraheerd om zodoende te veralgemeniseren. De wereld van de lijfelijkheid is veel omvangrijker, doordat de relatie met de wereld eromheen is meegenomen. In dit onderzoek wil ik de leerling eerst confronteren met de wereld, een wereld die ze kennen, die ze kunnen duiden en pas daarna met de wiskunde. Zodoende leren ze dat de wiskunde deel uitmaakt van die wereld, verankerd is. Een holistische benadering die kan leiden tot een later expliciteren (Schmitz, 1972).

Ik onderzoek of deze manier van werken een positief effect heeft op het plezier, of leerlingen zich beter in staat voelen de wiskunde aan te kunnen en of daarmee ook de betrokkenheid van leerlingen bij wiskunde A wordt vergroot. Dit onderzoek bevat een theoretische studie over Fenomenologie, betrokkenheid en hun rol in onderwijs. Vanuit deze studie is geformuleerd wat hier bedoeld wordt met Intuïtieve wiskunde.

Er is een viertal lessen ontwikkeld voor wiskunde A Havo 4. Deze zijn chronologisch ontworpen en circulair geëvalueerd, waarbij de ontwerpeisen gaandeweg zijn aangepast. In deze lessen zijn leerlingen eerst in contact gebracht met een ervaring of fenomeen. Hierbij is gebruik gemaakt van materiaal en zijn leerlingen uitgedaagd niet alleen het hoofd, maar het hele lichaam te gebruiken om deze ervaring te bestuderen en onder woorden te brengen. Na deze fase is verband gelegd tussen de ervaring en de wiskunde.

Leerlingen lieten in de lessen duidelijk zien dat ze meer plezier hadden. Gesprekken over wiskunde kregen meer diepgang en het gebruikte materiaal werd ook bij opdrachten uit het boek aangehaald. De verkregen data ondersteunt dat leerlingen meer betrokken zijn als ook de intuïtie aangesproken wordt. Met name de nieuwsgierigheid en lijfelijke betrokkenheid is sterker dan in een les met alleen opgaven uit het boek.

Aanleiding: Motivatie

Wiskunde A is voor veel leerlingen van Havo 4 een negatieve keuze. Ze hebben in het verleden vaak geen hoge cijfers voor wiskunde gehaald en krijgen een negatief advies om wiskunde B te kiezen. Er is hen verteld dat wiskunde wél belangrijk is, voor later, dus wordt wiskunde A gekozen. Uit gesprekken met leerlingen komt naar voren dat ze bereid zijn om te werken voor het vak, maar dat ze het niet leuk vinden. Hun doel is een voldoende halen, maar zijn niet geïnteresseerd in de vak inhoud. Ook zien ze tegen het vak op, zij waren immers nooit de beste van de klas. Wiskunde A wordt als heel abstract gezien, terwijl het ook toepassingen in de praktijk kent.

De aanleiding heeft overeenkomsten met motivatie van leerlingen en het vertrouwen voldoende competent te zijn om de wiskunde aan te gaan. Conley en French benoemen dat als leerlingen zicht hebben op wat hun leerdoelen zijn en hoe ze die kunnen bereiken hun zelfvertrouwen en efficiëntie stijgt. Hun metacognitieve vaardigheden verbeteren en ze zetten vaker door om hun doelen te behalen. Dit resulteert in een gevoel van betrokkenheid en motivatie, wat juist weer de basis van eigenaarschap vormt (Conley & French, 2013). Eigenaarschap kan worden gestimuleerd door leerlingen een gevoel van autonomie te geven, in te spelen op hun interesse, effectieve leerstrategieën aan te leren en feedback te geven. Het hebben van voldoende zelfvertrouwen en een positief en realistisch zelfbeeld zijn belangrijk voor het leveren van prestaties, zo concludeert Hattie. Een negatief zelfbeeld en laag zelfvertrouwen kan leiden tot het niet meer aangaan van een opdracht en het ontkennen van een eigen rol daarin (Hattie, 2009).

Een andere manier om naar motivatie en eigenaarschap te kijken is de Fenomenologie, een filosofische stroming die geen scheiding tussen lichaam en geest maakt. Je beleeft iets met je hele lichaam, niet alleen met de geest. Johnson stelt dat je alleen tot een abstract idee kunt komen door het eerst lijfelijk te ervaren. Vaardigheden komen niet voort uit het brein of de geest, maar hangen samen met de structuur van het lichaam en de manier waarop het lichaam zich tot de wereld verhoudt (Johnson, 1990). Wiskunde is van het hoogste abstractie niveau. Door het *doen* te verweven met de wiskunde verlaag je dat abstractie niveau. Door het denken vanuit het *doen* te benaderen, creëer je een fundament waarop die abstractie kan staan.

De Fenomenologie biedt ruimte te onderzoeken hoe men kan leren en welke rol de intuïtie daarin speelt. Betrokkenheid is de mate waarin een leerling actief is bij zijn eigen leerproces. Hier wordt onderzocht dat als je intuïtie ook een rol te geeft bij wiskunde A Havo 4, je leerlingen toegang geeft tot datgene wat ze *wel* kunnen. Of ze actiever worden, uitgedaagd om in vertrouwen het proces aan te gaan, waardoor de betrokkenheid kan worden vergroot.

Als je Intuïtief leren inzet bij wiskunde A Havo 4, in hoeverre bevordert dat de betrokkenheid?

Om een goed antwoord op deze onderzoeksvraag te kunnen formuleren wordt eerst gedefinieerd wat hier wordt bedoeld met Intuïtief leren. In dit onderzoek is voor een Fenomenologische inslag gekozen, daarom wordt deze stroming toegelicht en gekoppeld

aan betrokkenheid. Deze betrokkenheid is ontrafeld in twee deelvragen over plezier en het vertrouwen de wiskunde aan te kunnen. De volgende deelvragen worden onderzocht.

Wat is intuïtief leren?

Als je Intuïtief leren inzet bij wiskunde A Havo 4, in hoeverre beleven leerlingen dan meer plezier aan wiskunde?

Als je Intuïtief leren inzet bij wiskunde A Havo 4, in hoeverre voelen leerlingen zich beter in staat de wiskunde aan te kunnen?

Fenomenologie

De fenomenologie is een filosofische stroming die het wezen van de waarneming beschrijft, zonder gebruik te maken van vooropgezette kennis, onbevooroordeeld en zuiver benaderd. Husserl, “de vader van de fenomenologie” hanteert reducties om de essentiële eigenschappen van ervaringen af te leiden, met als doel de onzekere kennis tijdelijk te laten voor wat het is en zich te concentreren op de zekere kennis van datgene dat wordt aanschouwd.

In de fenomenologie van Merleau-Ponty staat het menselijk lichaam centraal, *le corps vécu*. Het lichaam is niet zomaar een object, net als andere objecten, maar maakt onze ervaringen mogelijk en beperkt hen ook. Het bepaalt onze plaats in de wereld, het perspectief van waaruit men de wereld aanschouwt. Door het rationalistisch denken hebben we ons afgekeerd van onze alledaagse wereld in de overtuiging dat onze zintuigen ons niets waardevols leren en dat alleen het streng objectieve weten het waard is om aan vast te houden (Slatman, 2003). In dit onderzoek wordt naast de feitelijkheid ook aan het zintuigelijke plek gegeven.

Dreyfus noemt de kennis die wij van de wereld hebben intuïtie. Intuïtie is niet een irrationeel of mystiek proces, maar een vaardigheid. Zoals het waarnemen van een gelijkenis tussen twee gezichten. Mensen kunnen zonder problemen een gezicht herkennen uit een grote groep mensen, maar laat hem eens onder woorden brengen *hoe* dat gezicht eruit ziet, *wat* het onderscheidt van de andere gezichten. Dit soort kennis is niet te expliciteren, het is geen propositionele kennis en de poging deze ‘tacit knowledge’ bijvoorbeeld in te bouwen in een computer is daarmee ook gedoemd te mislukken (Dreyfus & Athanasiou, 1988).

Ons vermogen om de dingen, van fysieke voorwerpen tot abstracte concepten, te begrijpen komt voort uit de manier waarop wij die dingen met ons lichaam en onze hersenen kunnen waarnemen en manipuleren en ons kunnen bewegen in de interactie met onze leefomgeving (Polanyi, 1967).

Er is niet *altijd* een scheiding tussen denken en doen. Bij de activiteit lopen hoeven we niet meer na te denken, dat gaat vanzelf, of zoals wel eens wordt genoemd, onderbewust. Maar wat gebeurt er bij gladheid, of als je over een evenwichtsbalk loopt? Dan hebben we opeens de gedachte weer nodig om ons te focussen op die activiteit lopen. Alles wat binnenkomt, komt binnen via het lichaam. Als we kijken zien we met onze ogen, die prikkels worden

vertaald in onze hersenen. Alles wat naar buiten gaat, gaat via ons lichaam eruit. We praten erover, of beelden het uit. Denken doe je niet alleen met je brein, maar met het hele lichaam. Wat je met je arm of been doet, is medebepalend voor de manier waarop je waarneemt, denkt en onthoudt. Een bezoek aan de tandarts kun je je beter herinneren als je op de bank gaat liggen met je mond opengesperd. Onze gedachten berusten op metaforen die voortdurend verwijzen naar onze fysieke positie in de ruimte en mogelijke interacties met objecten in de omgeving. Gedrag wordt dus niet door hersenen geproduceerd, maar wordt door hersenen mogelijk gemaakt (Dreyfys & Wrathall, 2006).

Wind mee of wind tegen

Om een voorbeeld te geven van de wind, je kunt deze beschrijven als bewegende luchtdeeltjes en een bijbehorende formule opstellen. Dat is ook wat de natuurkundigen doen, maar de ervaring van wind zegt iets heel anders. Wind méé is heerlijk, verlichtend, wind tegen voelt als vechten. Twee geheel tegengestelde ervaringen uit een zelfde fenomeen. De ervaring wordt echter niet meegenomen in de natuurkundige verklaring. Dit maakt dat de formule voor de meeste mensen nietszeggend is. Alleen degene die betrokken is, die weet hoe de luchtdeeltjes bewegen, kan er zich een voorstelling van maken. In de wiskunde op het Voortgezet onderwijs wordt ook gebruikt gemaakt van formules. Deze worden vaak aan een praktische, herkenbare situatie gekoppeld. De ervaring wordt echter ook hier buiten beschouwing gelaten. Mijn veronderstelling is dat leerlingen daarom ook niet betrokken zijn.

In de literatuur wordt onderscheid gemaakt tussen drie vormen van betrokkenheid in het onderwijs: gedragsmatige, emotionele en cognitieve betrokkenheid. Met gedragsmatige betrokkenheid wordt de aanwezigheid van een leerling aangegeven en of hij geconcentreerd aan het werk is tijdens een les. Met emotionele betrokkenheid of een leerling met plezier aan het werk is, verbonden is met school, zich daar goed voelt. Bij cognitieve betrokkenheid wordt gekeken of een leerling mentaal bereid is een taak aan te gaan, of hij er vertrouwen in heeft die taak aan te kunnen.

Volman beschrijft dat betere leerprestaties en leeropbrengsten op dit moment worden gezien als dé uitdaging voor het onderwijs. Door alleen te denken aan de prestatie, de hoogste score lopen we het risico een generatie te creëren met gebrek aan betrokkenheid.

Bij de lijfelijke (fenomenologische) betrokkenheid kijken we naar de afstand tussen subject en object, tussen de aanschouwer en het aanschouwde. Deze afstand kan worden verkleind door de relatie met de wereld om ons heen mee te nemen. In dit onderzoek wordt de leerling eerst geconfronteerd met de wereld, een wereld die ze kennen, die ze kunnen duiden en pas daarna met de wiskunde. Zodoende leren ze dat de wiskunde deel uitmaakt van die wereld, verankerd is. Een holistische benadering die kan leiden tot een later expliciteren (Schmit, 1972).

Intuïtieve wiskunde

Intuïtieve wiskunde is het intuïtief leren van wiskunde en wordt hier als volgt gedefinieerd. Intuïtief leren is leren zonder de te leren kennis in eerste instantie expliciet te maken. Het gaat over het moment waarop het onderbewuste onder de aandacht wordt gebracht, lijfelijk ervaren, zoals dat in een herkenbare situatie is en omgezet in bewuste kennis, waarin de wiskunde een plaats krijgt. Zoals bijvoorbeeld een slinger, vrijwel iedereen herkent het fenomeen vanuit de kinderlijke ervaring op de schommel, maar heeft zich er nooit concrete vragen over gesteld. Op het moment dat men er preciezer naar gaat kijken, dan wordt de intuïtieve kennis omgezet in geëxpliciteerde.

Intuïtief leren kun je onderscheiden in drie fasen. De eerste betreft de intuïtieve fase, men grijpt terug naar een herkenbare ervaring. Deze ervaring is altijd groter dan de volgende geëxpliciteerde fase. Tijdens het schommelen herkent men de beweging, hoe hoog of hoe snel, maar er is ook het gevoel in je onderbuik. De hoogte of snelheid is terug te vinden in een wiskundige formule, maar het gevoel in de onderbuik niet. We expliciteren slechts een deel van de hele ervaring. In de tweede fase wordt de intuïtieve fase onder woorden gebracht en grondig bestudeerd. In de laatste fase kunnen deze gegevens in verband worden gebracht, soms letterlijk in de vorm van een formule, met de wiskunde. Op deze manier veranker je de abstracte wiskunde met een fenomeen waar je al mee bekend bent en verlaag je daarmee ook die abstractie.

Samenvattend kent Intuïtieve wiskunde drie fasen:

1. **De intuïtieve fase:** De leerling wordt in contact gebracht met een ervaring of fenomeen.
2. Het grondig bestuderen en onder woorden brengen van de ervaring. Deze fase is zo breed mogelijk en biedt ruimte aan zowel het gevoel als de geëxpliciteerde kennis.
3. **De geëxpliciteerde fase:** De ervaring wordt in verband gebracht met de wiskunde.

4 Lessen

Met de drie fasen van Intuïtieve wiskunde is een viertal lessen ontwikkeld voor wiskunde A Havo 4. De eerste les behandelt het leerdoel "Ik kan met de GR grafieken tekenen en hun eigenschappen berekenen." Leerlingen kun je leren hoe ze een Grafische Rekenmachine moeten bedienen, maar ze vinden het lastig om een juist window te kiezen waarop de essentie van de grafiek te zien is.

Les 1 - Grafieken bij standaardformules

Bij de vijf standaardformules, te weten; lineaire -, kwadratische -, derdemacht -, wortel - en exponentiele formules, wordt een realistische situatie gegeven. De klas is verdeeld in groepen die ieder hun eigen situatie bestuderen. Aan leerlingen wordt gevraagd deze situatie onder woorden te brengen en te vertalen naar een grafiek, waarbij er aandacht besteed wordt aan de essentie (recht/gebogen, steil/vlak, max/min, snijpunten y- en x-as, etc.) van de grafiek. Vervolgens wordt gevraagd de bijbehorende standaard formule te benoemen. Zo beschrijven leerlingen bij een kwadratische formule hoe een bal door de lucht beweegt als je hem wegschopt. Ook krijgen ze een zachte bal erbij, waarmee ze de ervaring kunnen nabootsen. Klassikaal wordt besproken welke grafieken en formules horen bij de vijf gegeven situaties.

In de les zie ik leerlingen de grafieken uitbeelden met handen en voeten. De bal wordt herhaaldelijk in de lucht gegooid, leerlingen kijken wat er precies bovenin gebeurt en benoemen dat de bal wel stil lijkt te hangen.

Aan het einde van de les is er een gevalideerde vragenlijst afgenomen. Ongeveer 75% van de leerlingen geeft aan vaker dit soort lessen te willen hebben, waarbij 65% het leuker vindt dan opgaven uit het boek. 80% geeft aan dat ze de wiskunde hierdoor beter hebben begrepen. In gesprekken met leerlingen komt naar voren dat ze hun eigen onderdeel beter hebben onthouden dan die van de klasgenoten.

Een verbetering kan zijn leerlingen allemaal met hetzelfde onderwerp te laten werken, op hun eigen manier. Zo kunnen ze de analyse van een andere groep wél volgen en aanvullen met hun eigen bevindingen. Opdrachten met de bal of slinger, met materiaal dus, spraken meer tot de verbeelding. Hieruit volgt een voornemen om het volgende product met materiaal vorm te geven. Dit sluit zowel aan bij de theorie van Johnson en Merleau-Ponty als bij Embodied learning. Lichaamsactiviteit kan een positieve bijdrage leveren aan het genereren van leren. In de tweede en derde les wordt onderzocht wat het effect is van de belichaamde kennis, waar lichaam en geest beiden een rol krijgen door leerlingen de theorie lijfelijk, met materiaal te laten onderzoeken (Lindgren & Johnson-Glenberg, 2013).

Les 2 - Bord van Galton

De tweede les behandelt het leerdoel “Ik ken de verschillende verdelingskrommen en hun bijbehorende kenmerken (uniform, links- en rechtsscheef, meertoppig en symmetrisch)”. Leerlingen hebben vaak geen helder beeld van de verschillende soorten verdelingen. Het begrip is te abstract en te veelomvattend voor ze. Ze leren de verdelingskromme bij de termen, maar kunnen niet met eigen voorbeelden komen. Door leerlingen te laten werken met het bord van Galton, hoop ik de verschillende verdelingen tastbaar te maken.

Tijdens een korte instructie over verschillende verdelingskrommen gooi ik balletjes in het bord van Galton. Ik heb expres geen knikkers, maar papieren balletjes genomen, met een meer vriendelijk geluid.

Opmerkelijk dat de klas meteen stil wordt. Het beeld van het springende balletje, dat zijn weg zoekt naar één van de verzamelbakjes spreekt aan. In eerste instantie proberen leerlingen te voorspellen waar het balletje terecht komt, ze worden enthousiast. Het verloop van een verdeling is niet te voorspellen en dus komt de discussie op gang op welke verdeling het nu lijkt. De voorbeelden staan op het bord geprojecteerd en kunnen dus benoemd worden. Er ontstaat een ontspannen gesprek, waar leerlingen betrokken ogen. Even was de verdeling tweetoppig, maar toch eindigen ze allemaal min of meer symmetrisch verdeeld. Leerlingen vragen of zij het ook mogen proberen, natuurlijk. Het geeft een nieuwe kijk op het geheel, alsof ik in staat was geweest het te manipuleren.



Het feit dat je de balletjes kunt zien, kunt horen, dat het langzaam gaat en dat je mee kunt doen maakt een enorm verschil en bevestigt mijn vermoeden dat materiaal gebruik en het zelf kunnen doen in de klas van wezenlijk belang is om kennis te verankeren.

In gesprekken met leerlingen komt naar boven dat ze het in ieder geval leuk vonden. Ze geven aan daarna meer zin in het maken van opdrachten te hebben dan anders. Het is niet vastgesteld of ze er nu beter in waren.

Les 3 - Kiezelstenen

De derde les is meteen na de tweede afgenomen en behandelt het leerdoel “Ik kan data analyseren en kenmerken van een verdeling beschrijven. Ik leer wat betrouwbaarheidsintervallen zijn en hoe je daarmee kunt rekenen.” Leerlingen kunnen berekeningen goed uitvoeren, maar weten vaak niet wat de betekenis ervan is. Voorbeelden hiervan zijn de standaardafwijking, steekproefproportie en betrouwbaarheidsintervallen. Door leerlingen te laten werken met materiaal in de vorm van kiezelstenen, waaruit ze zelf een steekproef nemen en analyseren, hoop ik de begrippen te verankeren.

Als ik de les begin staat er voor me een grote bak met kiezelstenen. Op de tafels van leerlingen staan weegschaaltjes, plastic bakjes en een A3 met daarop gewichtsklassen. Na een korte instructie over steekproeven en betrouwbaarheidsintervallen nodig ik leerlingen uit hun steekproef stenen te nemen. Ze komen één voor één naar voren, er worden geen tips gegeven over hoe die het beste genomen kan worden. Leerlingen kunnen wel zien wat de eerste groep doet en daarop anticiperen. Vervolgens wordt hen gevraagd de steekproef

te analyseren op gewicht. Wat is het gemiddelde gewicht, hoeveel stenen zijn gepakt? Hoe is de steekproef verdeeld, zijn er veel zware of lichte stenen, of gelijk verdeeld? Op de A3 bladen worden de stenen gecategoriseerd naar gewicht en ik loop langs de groepjes om daar het gesprek over aan te gaan. Ik stel vragen over hoe de stenen verdeeld zijn en hoe ze de steekproef hebben genomen.

Het valt op dat leerlingen snel na de instructie naar voren komen om hun steekproef te nemen. Er ontstaan gesprekje's over hoeveel stenen hebben jullie dan? Die van ons zijn veel groter! Leerlingen beginnen met het ordenen van de stenen. Doordat de verdeling ook visueel is in zowel aantal stenen als gewicht, krijgen de gesprekken over steekproeven meer diepgang. De groepen vergelijken hun eigen steekproef met die van andere groepen en benoemen de verschillende verdelingen zoals ook behandeld bij de tweede les. Leerlingen hebben het werkblad ingevuld en de steekproefproportie, de standaardafwijking en het 95% BI uitgerekend, deze zijn op het bord ingetekend.

Hier komt naar voren dat klassikaal gezien de intervallen groter zijn dan die van de gehele populatie stenen. Een te kleine steekproef kan hieraan ten grondslag liggen. Ook zijn de steekproefproporties relatief hoog. Doordat kleine stenen naar beneden zakken, zijn er relatief veel grote stenen gepakt. Hierna is een opdracht uit het boek klassikaal behandeld. Het betrouwbaarheidsinterval kwam voor mijn gevoel beter uit de verf dan voorgaande jaren, doordat ik terug kon pakken op de opgedane ervaring met steekproeven.



Samenvattend zag ik dat leerlingen plezier hadden in de les. Ze waren ontspannen en kregen de tijd om het materiaal en de eraan gekoppelde wiskunde te verkennen. Die extra ervaring heeft bijgedragen aan het begrip van leerlingen en de drempel verlaagd de wiskunde met betrokkenheid aan te gaan.

Resultaten

Na het schoolexamen zijn de resultaten vergeleken met de parallelklas. Het onderzoeksdoel is in eerste instantie niet om scores te verbeteren. Het is echter te verwachten dat als leerlingen meer betrokken zijn, hun resultaten verbeteren (Conley & French, 2013). Een aantal opgaven is geselecteerd die direct verband houden met de leerdoelen van les 2 en 3. De behaalde scores van deze vragen zijn vergeleken met de parallelklas. Bij de meeste vragen is er slechts een klein effect. Twee vragen hebben een middelgroot tot zeer groot negatief effect. Deze vragen gingen over het betrouwbaarheidsinterval. Navraag bij mijn collega levert op dat zij minder lesuitval heeft gehad. Ook geeft zij aan extra aandacht besteed te hebben aan betrouwbaarheidsintervallen door drie lessen gerichte opdrachten te maken.

Concluderend hebben les 2 en 3 weinig effect gehad op de scores van het bijbehorende schoolexamen. Zeker op de korte termijn heeft gericht oefenen een positief effect op de score.

Met open vragen is onderzocht wat leerlingen van de lessen 2 en 3 vonden, of ze zich het leerdoel kunnen herinneren en of ze verwachten het schoolexamen goed te gaan maken. Leerlingen geven aan het leuke lessen te hebben gevonden, afwisselend en leerzaam. Gemiddeld 70% weet de leerdoelen ongeveer te benoemen, maar niet precies. Om uit te sluiten dat de leerdoelen van gewone lessen ook na zes weken onthouden zijn, is dezelfde vraag gesteld over de eerste les na de toets week. Daar benoemt slechts 25% van de leerlingen ongeveer het leerdoel.

De meeste leerlingen verwachten het schoolonderzoek goed te gaan maken. Door de open vraagstelling zijn de antwoorden vaak summier, waardoor het lastig is hier een waarde aan toe te kennen.

Les 4 - Kaartspel

De vierde les behandelt het leerdoel “Ik kan verschillende soorten telproblemen oplossen passend bij de context. Ik ken de begrippen permutatie, faculteit en combinatie, weet wanneer ik die moet toepassen en hoe ik ze moet uitrekenen, ook met behulp van GR.”

Leerlingen halen de begrippen permutatie en combinatie geregeld door elkaar. Door leerlingen te laten werken met materiaal in de vorm van een kaartspel, hoop ik de begrippen permutatie en combinatie te verankeren. Deze les is online gegeven vanwege de lockdown. Vooraf heb ik de leerlingen gevraagd, zo mogelijk, een stok kaarten te pakken.

Er is een instructie gegeven over telproblemen met en zonder herhalen en met en zonder volgorde. Vervolgens zijn de leerlingen in breakout-rooms geplaatst en gevraagd een



werkblad in te vullen met behulp van hun kaartspel. De les was opgebouwd vanuit de drie fasen van Intuïtieve wiskunde. Leerlingen kregen de ervaring van een kaartspel gegeven, zoals Toepen, waar de volgorde wel of niet belangrijk is. Deze les verliep stroever dan bij een fysieke les. Leerlingen zien niet wat de ander doet, er is geen interactie. Zoals Ryan en Patrick beschrijven in *"The classroom social environment and changes in adolescents' motivation and engagement during middle school."* speelt de sociale omgeving een significante rol bij de motivatie en betrokkenheid van leerlingen (Ryan & Partick, 2001). Daar waar ze in een fysieke omgeving kijken naar elkaar, leren van elkaar, enthousiast worden van elkaar is een online omgeving opgeknipt in losse stukken. Het is juist de gedeelde ervaring die ik opzoek bij Intuïtieve wiskunde en die ontbrak.

Vermoedelijk dat in een fysieke les het gekozen materiaal een extra dimensie zou hebben gegeven, online was dit niet het geval. Ook al zie je de leerlingen in kleine schermpjes, je voelt niet wat er speelt. Je hoort niet of ze het hebben begrepen, hoort geen onrust of enthousiasme. In onderwijs zijn alle zintuigen van belang, zij liggen ten grondslag aan de ervaring die we samen delen.

Conclusie en aanbeveling

Als je Intuïtief leren inzet bij wiskunde A Havo 4, in hoeverre bevordert dat de betrokkenheid?

Plezier, zelfvertrouwen en motivatie zijn wederkerig verbonden en houden alle drie verband met de betrokkenheid van de leerling. Een fenomenologische benadering van onderwijzen biedt ruimte aan een wereld die er óók is. Leren gebeurt niet alleen met het hoofd, maar met het lichaam als geheel (Merleau-Ponty, 2003). Door vanuit de ervaring te vertrekken en pas later te expliciteren, wordt de afstand verkleind en kan de wiskunde vloeiend overgaan in de abstractie. De betrokkenheid wordt vergroot door de wereld eromheen mee te nemen, intuïtie krijgt een plaats in het onderwijs (Schmitz, 1972). Bij de les over grafieken en standaardformules viel het op dat er veel gediscussieerd werd. Leerlingen bootsten de grafieken na met hun handen voordat deze op papier werd gezet, een extra ervaring. Bij het bord van Galton werden de leerlingen stil en namen zelf initiatief om te onderzoeken, werden nieuwsgierig. De les met kiezelstenen maakte dat leerlingen hun eigen steekproeven onder handen kregen. Het wegen van de stenen, het visueel maken van hun verdeling, het vergelijken met de andere steekproeven in de klas maakte de abstracte betrouwbaarheidsintervallen concreet. De vertraging, verdieping in het materiaal maakt dat leerlingen zich de lesstof langer herinneren.

Dit onderzoek laat zien dat leerlingen meer betrokken zijn als ook de intuïtie aangesproken wordt. Aanleiding voor dit onderzoek was dat leerlingen niet geïnteresseerd waren, maar plichtsgetrouw huiswerk maakten. Met name de nieuwsgierigheid, en lijfelijke betrokkenheid is sterker dan in een les met alleen opgaven uit het boek.

Kennis wordt nog voornamelijk getoetst door leerlingen individueel schriftelijke opdrachten te laten maken. Het is verleidelijk leerlingen op korte termijn veel opdrachten te laten oefenen en zo de resultaten te verbeteren. Een eenzijdige nadruk op niveau trekt de aandacht weg van wat niet in toetsen tot uitdrukking komt, zoals zelfstandigheid en nieuwsgierigheid (Volman, 2011). Het is aan te bevelen ook toetsing fenomenologisch te benaderen, waarbij er ook aandacht is voor de werkelijkheid zoals die beleefd wordt.

Als je Intuïtief leren inzet bij wiskunde A, Havo 4, in hoeverre beleven leerlingen dan meer plezier aan wiskunde?

Dit onderzoek laat duidelijk zien dat leerlingen meer plezier beleven aan de Intuïtieve lessen wiskunde. Het proefondervindelijk werken verlaagt de drempel naar de abstractie en maakt dat de wiskunde meer gaat leven. De aangereikte ervaring wordt door leerlingen samen gedeeld waarmee de emotionele betrokkenheid wordt vergroot. Niet alleen leerlingen vonden de lessen plezierig, ik ook. Er ontstond veel meer diepgang in de gesprekken over de leerdoelen. Het leek alsof er minder verplichting was en meer oprechte nieuwsgierigheid. Leerlingen wilden echt weten hoe iets werkt.

Dit onderzoek is echter niet te veralgemeniseren. Doordat ik als docent een voorliefde heb voor een breed perspectief, het maken, het onderzoeken, maakt dat dit onderwerp bij me past. Dit is niet voor alle docenten zo en voorwaarde voor succes is dat je er als docent ook echt in gelooft. Ik pleit voor meer diversiteit in de leerroutes van leerlingen. Dat ze kunnen kiezen op welke manier ze willen leren en bijvoorbeeld lessen bij verschillende docenten kunnen volgen.

Als je Intuïtief leren inzet bij wiskunde A, Havo 4, in hoeverre voelen leerlingen zich beter in staat de wiskunde aan te kunnen?

In dit onderzoek heb ik naast de feitelijkheid ook de ervaring een plek gegeven. De wiskunde wordt vaak bestempeld als moeilijk, te abstract. Als maatschappij hebben we ons ook vooral gericht op de feitelijkheid en daarmee verwaarloosd dat men ook vanuit de zintuigen leert. Ik denk dat hier veel winst te behalen is in het vertrouwen om wiskunde aan te kunnen. Door leerlingen een breder repertoire aan te bieden zal de wiskunde ook dichterbij andere vakken komen te staan, meer verweven raken.

Het is moeilijk om conclusies te trekken of leerlingen met dit onderzoek ook beter leren, of hogere scores halen. Alleen op de lange termijn kun je hier iets over zeggen. Op het moment dat de drempel naar abstractie wordt verlaagd, leerlingen meer plezier hebben en meer betrokken zijn, zullen resultaten stijgen en hopelijk kennis ook langer beklijven. Ik raad aan de intuïtieve wiskunde in alle jaarlagen ruimte te geven. Voor een meer cijfermatig bewijs kunnen de resultaten gaandeweg worden vergeleken.

Dit onderzoek heeft me leerlingen gebracht die meer geïnteresseerd zijn in wiskunde A. Door naast het feitelijke ook het zintuiglijke een plek te geven is de wiskunde meer deel gaan uitmaken van de wereld om hen heen. De drempel naar abstractie is verlaagd, waardoor gesprekken over wiskunde meer diepgang konden krijgen. Ik hoop leerlingen te kunnen blijven boeien en een basis te vormen voor hun toekomst.

Literatuurlijst

- Conley, D. T., & French, E. M. (2013). Student Ownership of Learning as a Key Component of College Readiness. *American Behavioral Scientist*, 58, 1018–1034. doi:10.1177/0002764213515232.
- Dreyfus, H. L., & Athanasiou, T. (1988). *Mind Over Machine*, Amsterdam: Amsterdam University Press.
- Dreyfus, H. L., & Wrathall, M. A. (2006). *A Companion to Phenomenology and Existentialism*. West Sussex: Blackwell Publishing Ltd, pp. 9–10.
- Hattie J. (2009). *Visible learning – A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London & New York: Routledge.
- Johnson, M. (1990). *The Body in the Mind: The Bodily Basis of Meaning, Imagination, and Reason* (1ste editie). Chicago: University of Chicago Press.
- Lindgren, R., & Johnson-Glenberg, M. (2013). Emboldened by Embodiment. *Educational Researcher*, 42(8), 445–452. doi:10.3102/0013189x13511661
- Merleau-Ponty, M. (2003). *De wereld waarnemen* (3e druk). Amsterdam: Boom uitgevers Amsterdam.
- Polanyi, M. (1967). *The tacit dimension*. Garden City, N.Y.: Anchor Books.
- Ryan, A. M., & Patrick, H. (2001). The Classroom Social Environment and Changes in Adolescents' Motivation and Engagement During Middle School. *American Educational Research Journal*, 38(2), 437–460. doi:10.3102/00028312038002437
- Schmitz, H. (1972). Über leibliche Kommunikation. *Zeitschrift für klinische Psychologie und Psychotherapie*, 1972 (20), 4–32.
- Slatman, J. (2003). Inleiding. In: M. Merleau-Ponty, *De wereld waarnemen* (vertaling van *Causeurseries 1948* door J. Slatman), Amsterdam: Boom, pp. 7–25, (tweede, ongewijzigde druk 2006)
- Volman, M. (2011). Kennis van betekenis: betrokkenheid als kwaliteit van leerprocessen en leerresultaten. *Universiteit van Amsterdam*. Geraadpleegd op 30-3-2021, van http://www.kohnstamminstituut.uva.nl/pdf_documenten/110617%20oratie%20Monique%20Volman.pdf